

Лекция 7. Основы теории фильтрации случайных процессов

Фильтрация, интерполяция, экстраполяция

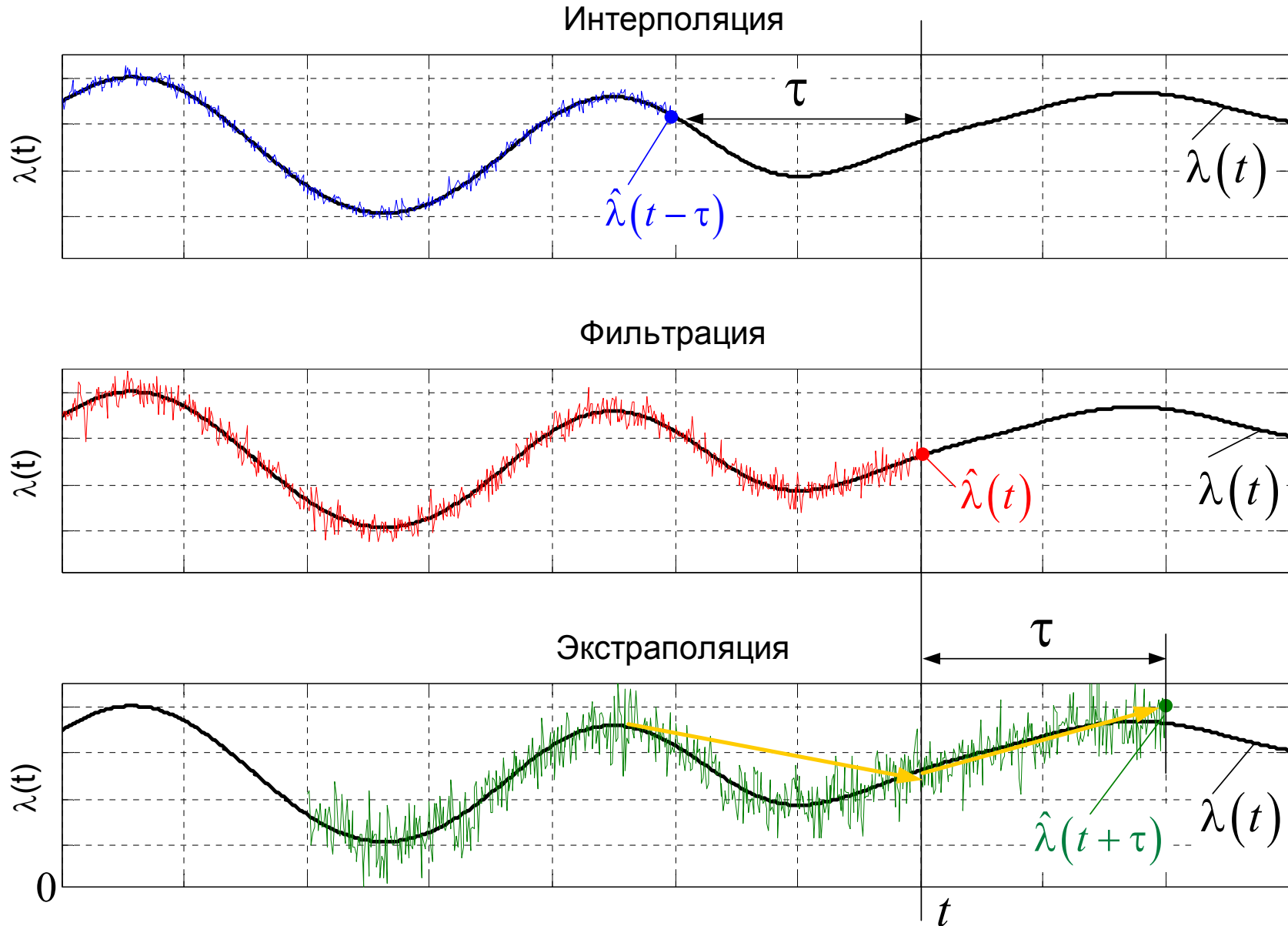
Задача фильтрации: используя наблюдения $y(t)$ и апр. инф. требуется сформировать оценку $\hat{\lambda}(t)$ для текущего момента времени t .

Задача интерполяции: требуется сформировать оценку $\hat{\lambda}(t - \tau)$ для момента времени в прошлом.

Задача экстраполяции: требуется предсказать оценку $\hat{\lambda}(t + \tau)$ для момента времени в будущем.

Критерий – минимальная дисперсия ошибки.

Фильтрация, экстраполяция, интерполяция



Постановка задачи оптимальной фильтрации

Требуется дать оценку процесса λ не для какого-то одного, а для каждого интересующего момента времени по критерию минимума дисперсии ошибки.

Модель наблюдений:

$y(t_k) = S(t_k, \lambda_k(t_k)) + n(t_k)$: наблюдения на интервале $[0, t_k]$

$S(t_k, \lambda(t_k))$ – сигнал, несущий информационный процесс $\lambda(t_k)$

$n(t_k)$ - белый шум с односторонней СПМ $N_0 = 2\sigma_n^2 T$

+ известна априорная информация о $\lambda(t_k)$

Априорная информация о процессе $\lambda_k(t_k)$

В теории оптимальной фильтрации сообщение $\lambda_k(t_k)$ представляют как часть многомерного марковского процесса:

$$\lambda_k(t_k) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t_k), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad k - \text{момент времени}$$

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, t_{k-1}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_{k-1}, t_{k-1})\xi_{k-1}$$

ξ_k – m -мерный вектор белых шумов

с корреляционной матрицей \mathbf{R}_ξ

В каждый момент времени \mathbf{x}_k является векторной с.в. и описывается априорной ПВ $p(\mathbf{x}_k, t_k)$

Рекуррентное уравнение для АПВ дискретных процессов

Из теории статистических решений оценка \mathbf{x} формируется на основе АПВ \mathbf{x} :

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \int_{\mathbf{x}} \mathbf{x} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^k) d\mathbf{x} \quad \text{или} \quad \hat{\mathbf{x}}_k = \arg \max p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^k)$$

Поэтому надо искать апостериорную плотность вероятности (АПВ) \mathbf{x} на текущий момент времени k : $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^k)$

Рассмотрим совместную условную ПВ $p(\mathbf{x}_k, y_k | \mathbf{Y}_0^{k-1})$

$$p(\mathbf{x}_k, y_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^k) p(y_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}) = p(y_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{Y}_0^{k-1}) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1})$$

Рекуррентное уравнение для АПВ дискретных процессов

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^k) p(y_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}) = p(y_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{Y}_0^{k-1}) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1})$$

$\mathbf{Y}_0^k = y_0, y_1, \dots, y_k$ - выборка

$p(y_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}) = p(y_k) = 1/c$ - не зависит от \mathbf{x} ;

$p(y_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{Y}_0^{k-1}) = p(y_k | \mathbf{x}_k)$ - одношаговая функция правдоподобия;

отсюда:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^k) = c p(y_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1})$$

При белом гауссовском шуме наблюдений

$$p(y_k | \mathbf{x}_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp\left(-\frac{(y_k - S(\mathbf{x}_k, t_k))^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

Плотность вероятности экстраполированной оценки

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}) = ???$$

$$p(a) = \int_b p(a, b) db; \quad p(a | c) = \int_b p(a, b | c) db = \int_b p(a | b, c) p(b | c) db;$$

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}) = \int_{\mathbf{x}_{k-1}} p(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{Y}_0^{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} = \int_{\mathbf{x}_{k-1}} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{Y}_0^{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{Y}_0^{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}$$

$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{Y}_0^{k-1}) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$ так как никакие наблюдения процесса \mathbf{x} до $(k-1)$ -го момента времени не дадут больше информации, чем само значение \mathbf{x}_{k-1}

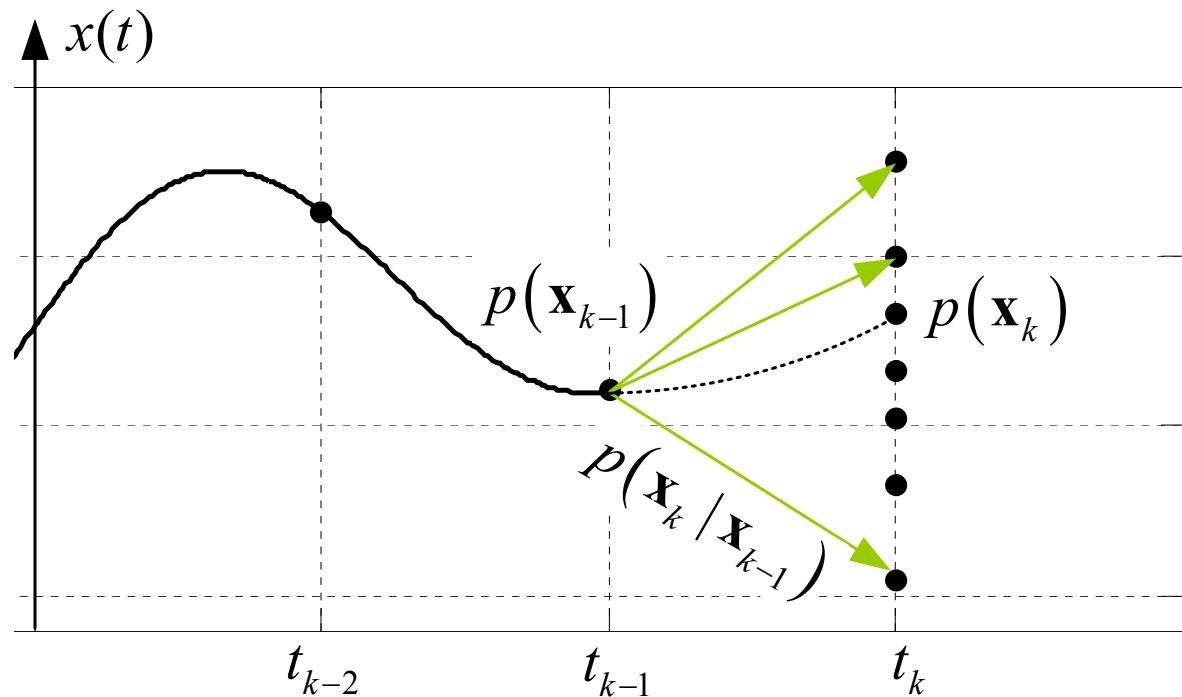
Отсюда:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}) = \int_{\mathbf{x}_{k-1}} p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{Y}_0^{k-1}) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}$$

Плотность вероятности перехода марковского процесса

$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$ - плотность вероятности перехода

Пример
нахождения ПВ
перехода для
скалярного x :



$$x_k = f(x_{k-1}, t_{k-1}) + g(x_{k-1}, t_{k-1})\xi_{k-1},$$

ξ_{k-1} - дискретный БГШ с дисперсией σ_ξ^2

$$p(x_k | x_{k-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x_k - f(x_{k-1}, t_{k-1}))^2}{2\sigma^2}\right), \quad \sigma^2 = \sigma_\xi^2 g^2(x_{k-1}, t_{k-1})$$

Рекуррентное уравнение для АПВ дискретных процессов

Находим ПВ экстраполированной оценки через ПВ перехода:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{Y}_0^{k-1}) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{Y}_0^{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} = \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{Y}_0^{k-1}) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}$$

Отсюда

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^k) = cp(y_k | \mathbf{x}_k) \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{Y}_0^{k-1}) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}, \quad p(\mathbf{x}_0 | \mathbf{Y}_0^0) = p_{ap}(\mathbf{x}_0)$$

- уравнение Стратоновича для дискретных МП

Нормировочная константа

Одношаговая функция правдоподобия

АПВ на предыдущем шаге

ПВ перехода

Уравнение Стратоновича для АПВ непрерывных МП

Описание непрерывного МП:

$$\lambda(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)\xi(t)$$

$\xi(t)$ – m -мерный вектор БГШ с корреляционной матрицей $\mathbf{R}_\xi(\tau) = (\mathbf{S}_\xi/2)\delta(\tau)$

$$\frac{dp(\mathbf{x}, t | \mathbf{Y}_0^t)}{dt} = L(p(\mathbf{x}, t | \mathbf{Y}_0^t)) + \left[F(\mathbf{x}, t) - \int_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}, t) p(\mathbf{x}, t | \mathbf{Y}_0^t) d\mathbf{x} \right] p(\mathbf{x}, t | \mathbf{Y}_0^t)$$

$$F(\mathbf{x}, t) = \mathbf{S}^\top(\mathbf{c}\mathbf{x}, t) 2\mathbf{N}_n^{-1}(\mathbf{y}(t) - 0,5\mathbf{S}(\mathbf{c}\mathbf{x}, t)); \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{S}(\mathbf{c}\mathbf{x}, t) + \mathbf{n}(t);$$

\mathbf{N}_n - корреляционная матрица шумов наблюдений: $M[\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^\top(t+\tau)] = (\mathbf{N}_n/2)\delta(\tau)$

$L(*)$ - дифференциальный оператор Фоккера-Планка-Колмогорова (стр. 47)

АПВ дискретных процессов с учетом неинформ. параметров

Наблюдаемый сигнал:

$$y_k = S_k(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}) + n_k, \quad M[n_k n_m] = \sigma_n^2 \delta_{km}, \quad \boldsymbol{\mu} = \text{const} \subset p_{ap}(\boldsymbol{\mu})$$

Основная идея:
$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^k) = \int_{\boldsymbol{\mu}} p(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu} | \mathbf{Y}_0^k) d\boldsymbol{\mu}$$

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^k) = c_1 p_{ap}(\mathbf{x}_k) \int_{\boldsymbol{\mu}} p(\mathbf{Y}_0^k | \mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}) p_{ap}(\boldsymbol{\mu}) d\boldsymbol{\mu}, \quad p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}) = c_2 p_{ap}(\mathbf{x}_k) \int_{\boldsymbol{\mu}} p(\mathbf{Y}_0^{k-1} | \mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}) p_{ap}(\boldsymbol{\mu}) d\boldsymbol{\mu}$$

сумасшедшая тавтология:
$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^k) = \left(\frac{p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^k)}{p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1})} \right) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1})$$

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^k) = c \tilde{p}(y_k | \mathbf{x}_k) \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{Y}_0^{k-1}) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}, \quad \text{где}$$

$$\tilde{p}(y_k | \mathbf{x}_k) = \int_{\boldsymbol{\mu}} p(\mathbf{Y}_0^k | \mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}) p_{ap}(\boldsymbol{\mu}) d\boldsymbol{\mu} / \int_{\boldsymbol{\mu}} p(\mathbf{Y}_0^{k-1} | \mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}) p_{ap}(\boldsymbol{\mu}) d\boldsymbol{\mu}, \quad p(\mathbf{x}_0 | \mathbf{Y}_0^0) = p_{ap}(\mathbf{x}_0)$$