Приложение 1
Вывод апостериорной плотности вероятности $p(\boldsymbol{x}_\nu \mid \boldsymbol{Y}_1^k)$

Рассмотрим АПВ $p(\mathbf{X}_1^k \mid \mathbf{Y}_1^k)$, где:

- $\mathbf{Y}_1^k = [\mathbf{y}_1 ... \mathbf{y}_k]$ - выборка независимых наблюдений;
- $\mathbf{X}_0^k = [\mathbf{x}_1 ... \mathbf{x}_k]$ - векторная Марковская последовательность.

Согласно формуле Байеса:

$$p(\mathbf{X}_1^k, \mathbf{Y}_1^k) = p(\mathbf{X}_1^k \mid \mathbf{Y}_1^k) \cdot p(\mathbf{Y}_1^k) = p(\mathbf{Y}_1^k \mid \mathbf{X}_1^k) \cdot p(\mathbf{X}_1^k)$$

$$p(\mathbf{X}_1^k \mid \mathbf{Y}_1^k) = \frac{p(\mathbf{Y}_1^k \mid \mathbf{X}_1^k) \cdot p(\mathbf{X}_1^k)}{p(\mathbf{Y}_1^k)} \tag{1}$$

$$p(\mathbf{X}_1^k \mid \mathbf{Y}_1^k) = c_1 \cdot p(\mathbf{Y}_1^k \mid \mathbf{X}_1^k) \cdot p(\mathbf{X}_1^k);$$

Т.к. $p(\mathbf{Y}_1^k)$ – не зависит от $\mathbf{X}_1^k$, введем нормировочную константу c_1:

$$p(\mathbf{X}_1^k \mid \mathbf{Y}_1^k) = c_1 \cdot p(\mathbf{Y}_1^k \mid \mathbf{X}_1^k) \cdot p(\mathbf{X}_1^k); \tag{2}$$

По условию задачи отсчеты шума наблюдений независимы. Следовательно, $\mathbf{y}_1$ зависит только от $\mathbf{x}_1$, и не зависит от $\mathbf{y}_2 ... \mathbf{y}_k$ и $\mathbf{x}_2 ... \mathbf{x}_k$. Также можно сказать, что $\mathbf{y}_2 ... \mathbf{y}_k$ не зависят от $\mathbf{x}_1$, при условии, что известны $\mathbf{x}_2 ... \mathbf{x}_k$. Тогда $p\left(\mathbf{Y}_1^k \mid \mathbf{X}_1^k\right) = p\left(\mathbf{y}_1 \middle| \mathbf{x}_1\right) p\left(\mathbf{y}_2 ... \mathbf{y}_k \middle| \mathbf{x}_2 ... \mathbf{x}_k\right)$. Продолжая аналогичные рассуждения для $\mathbf{y}_2 ... \mathbf{y}_k$ можно заключить, что:

$$p(\mathbf{Y}_1^k \mid \mathbf{X}_1^k) = \prod_{j=1}^{k} p(\mathbf{y}_j \mid \mathbf{x}_j); \tag{3}$$

Где $p(\mathbf{y}_j \mid \mathbf{x}_j)$ – одношаговая функция правдоподобия.

Учитывая то, что $\mathbf{X}_1^k$ – это векторная Марковская последовательность:

$$
\begin{aligned}
p(\mathbf{X}_1^k) &= p\left(\mathbf{x}_k \mid \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{k-1}\right) \cdot p\left(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{k-1}\right) = \\
&= p\left(\mathbf{x}_k \mid \mathbf{x}_{k-1}\right) \cdot p\left(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{k-1}\right) = \\
&= p\left(\mathbf{x}_k \mid \mathbf{x}_{k-1}\right) \cdot p\left(\mathbf{x}_{k-1} \mid \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{k-2}\right) \cdot p\left(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{k-2}\right) = \\
&= p\left(\mathbf{x}_k \mid \mathbf{x}_{k-1}\right) \cdot p\left(\mathbf{x}_{k-1} \mid \mathbf{x}_{k-2}\right) \cdot p\left(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{k-2}\right) = \ldots
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Продолжая аналогичные выкладки до $\mathbf{x}_1$, получим:

$$
p(\mathbf{X}_1^k) = \prod_{j=1}^{k} p(\mathbf{x}_j \mid \mathbf{x}_{j-1}); \tag{5}
$$

Где $p(\mathbf{x}_j \mid \mathbf{x}_{j-1})$ – плотность вероятности (ПВ) перехода.

В начальный момент времени $p\left(\mathbf{x}_1 \middle| \mathbf{x}_0\right) \equiv p\left(\mathbf{x}_1\right)$, где $p\left(\mathbf{x}_1\right)$ - априорная ПВ.

Выразим АПВ $p(\mathbf{X}_1^k \mid \mathbf{Y}_1^k)$ с учетом уравнений (2),(3),(5):

$$
p(\mathbf{X}_1^k \mid \mathbf{Y}_1^k) = c_1 \cdot \prod_{j=1}^{k} p(\mathbf{y}_j \mid \mathbf{x}_j) \cdot p(\mathbf{x}_j \mid \mathbf{x}_{j-1}); \tag{6}
$$

Одношаговая функция правдоподобия в правой части $p(\mathbf{y}_j \mid \mathbf{x}_j)$ фактически задана моделью наблюдений. Плотность вероятности перехода марковского процесса $p(\mathbf{x}_j \mid \mathbf{x}_{j-1})$ фактически задана динамически уравнением. Константа c_1 может быть получена из условия нормировки $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p\left(x\right) \mathrm{d}\, x = 1$.

Из свойства согласованности совместной ПВ:

$$
\begin{aligned}
& p\left(\mathbf{x}_\nu \middle| \mathbf{Y}_1^k\right) = \\
&= \int\limits_{\mathbf{x}_1} \cdots \int\limits_{\mathbf{x}_{\nu-1}} \int\limits_{\mathbf{x}_{\nu+1}} \cdots \int\limits_{\mathbf{x}_k} p\left(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k \middle| \mathbf{Y}_1^k\right) \mathrm{d}\,\mathbf{x}_k \ldots \mathrm{d}\,\mathbf{x}_{\mathbf{x}_{\nu+1}}\, \mathrm{d}\,\mathbf{x}_{\mathbf{x}_{\nu-1}} \ldots \mathrm{d}\,\mathbf{x}_1 = \\
&= \int\limits_{\mathbf{X}_1^{\nu-1}} \int\limits_{\mathbf{X}_{\nu+1}^k} p\left(\mathbf{X}_1^k \middle| \mathbf{Y}_1^k\right) \mathrm{d}\,\mathbf{X}_{\nu+1}^k\, \mathrm{d}\,\mathbf{X}_1^{\nu-1},
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Подставим (6) в (7) получим уравнение для АПВ $p\left(\boldsymbol{x}_\nu \middle| \boldsymbol{Y}_1^k\right)$:

$$
\begin{aligned}
p\left(\mathbf{x}_\nu \middle| \mathbf{Y}_1^k\right) &= c_1 \cdot \int_{\mathbf{X}_1^{\nu-1}} \int_{\mathbf{X}_{\nu+1}^k} \prod_{j=1}^{k} p(\mathbf{y}_j \mid \mathbf{x}_j) \cdot p(\mathbf{x}_j \mid \mathbf{x}_{j-1}) \, \mathrm{d}\,\mathbf{X}_{\nu+1}^k \, \mathrm{d}\,\mathbf{X}_1^{\nu-1} = \\
&= c_1 \cdot \int_{\mathbf{X}_1^{\nu-1}} \prod_{j=1}^{\nu-1} p(\mathbf{y}_j \mid \mathbf{x}_j) \cdot p(\mathbf{x}_j \mid \mathbf{x}_{j-1}) \, \mathrm{d}\,\mathbf{X}_1^{\nu-1} \cdot \\
&\quad \cdot \int_{\mathbf{X}_{\nu+1}^k} \prod_{j=\nu+1}^{k} p(\mathbf{y}_j \mid \mathbf{x}_j) \cdot p(\mathbf{x}_j \mid \mathbf{x}_{j-1}) \, \mathrm{d}\,\mathbf{X}_{\nu+1}^k
\end{aligned} \tag{8}
$$

Приложение 2
Вывод рекуррентного уравнения для эволюции апостериорной плотности вероятности $p\left(\mathbf{X}_\nu^k \middle| \mathbf{Y}_1^k\right)$

Из свойства согласованности совместной ПВ и пользуясь (3) можно записать:

$$
\begin{aligned}
&p\left(\mathbf{X}_\nu^k \middle| \mathbf{Y}_1^k\right) = \int\limits_{\mathbf{X}_1^{\nu-1}} p\left(\mathbf{X}_1^k \middle| \mathbf{Y}_1^k\right) \mathrm{d}\,\mathbf{X}_1^{\nu-1} = c \cdot \int\limits_{\mathbf{X}_1^{\nu-1}} \prod_{i=1}^{k} p\left(\mathbf{y}_i \middle| \mathbf{x}_i\right) p\left(\mathbf{x}_i \middle| \mathbf{x}_{i-1}\right) \mathrm{d}\,\mathbf{X}_1^{\nu-1} = \\
&= c \cdot \int\limits_{\mathbf{X}_1^{\nu-1}} p\left(\mathbf{x}_\nu \middle| \mathbf{x}_{\nu-1}\right) \prod_{i=1}^{\nu-1} p\left(\mathbf{y}_i \middle| \mathbf{x}_i\right) p\left(\mathbf{x}_i \middle| \mathbf{x}_{i-1}\right) \mathrm{d}\,\mathbf{X}_1^{\nu-1} \times \\
&\times p\left(\mathbf{y}_\nu \middle| \mathbf{x}_\nu\right) \cdot \prod_{i=\nu+1}^{k} p\left(\mathbf{y}_i \middle| \mathbf{x}_i\right) p\left(\mathbf{x}_i \middle| \mathbf{x}_{i-1}\right).
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Предположим, что на предыдущем шаге была получена ПВ $p\left(\mathbf{X}_{\nu-1}^{k-1} \middle| \mathbf{Y}_1^{k-1}\right)$. Меняя соответствующие индексы в только что полученном выражении, запишем:

$$
\begin{aligned}
&p\left(\mathbf{X}_{\nu-1}^{k-1} \middle| \mathbf{Y}_1^{k-1}\right) = c_1 \cdot \int\limits_{\mathbf{X}_1^{\nu-2}} p\left(\mathbf{x}_{\nu-1} \middle| \mathbf{x}_{\nu-2}\right) \prod_{i=1}^{\nu-2} p\left(\mathbf{y}_i \middle| \mathbf{x}_i\right) p\left(\mathbf{x}_i \middle| \mathbf{x}_{i-1}\right) \mathrm{d}\,\mathbf{X}_1^{\nu-2} \times \\
&\times p\left(\mathbf{y}_{\nu-1} \middle| \mathbf{x}_{\nu-1}\right) \cdot \prod_{i=\nu}^{k-1} p\left(\mathbf{y}_i \middle| \mathbf{x}_i\right) p\left(\mathbf{x}_i \middle| \mathbf{x}_{i-1}\right)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

С другой стороны, в (9) можно взять внешний интеграл по $\mathbf{x}_{\nu-1}$, а внутрениие – по $\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{\nu-2}$:

$$p\left(\mathbf{X}_\nu^k \middle| \mathbf{Y}_1^k\right) = c \cdot p\left(\mathbf{y}_\nu \middle| \mathbf{x}_\nu\right) \cdot \prod_{i=\nu+1}^{k} p\left(\mathbf{y}_i \middle| \mathbf{x}_i\right) p\left(\mathbf{x}_i \middle| \mathbf{x}_{i-1}\right) \times$$
$$\times \int_{\mathbf{x}_{\nu-1}} \int_{\mathbf{X}_1^{\nu-2}} p\left(\mathbf{x}_\nu \middle| \mathbf{x}_{\nu-1}\right) \prod_{i=1}^{\nu-1} p\left(\mathbf{y}_i \middle| \mathbf{x}_i\right) p\left(\mathbf{x}_i \middle| \mathbf{x}_{i-1}\right) \mathrm{d}\,\mathbf{X}_1^{\nu-2}\, \mathrm{d}\,\mathbf{x}_{\nu-1} =$$
$$= c \cdot p\left(\mathbf{y}_\nu \middle| \mathbf{x}_\nu\right) \cdot \prod_{i=\nu+1}^{k} p\left(\mathbf{y}_i \middle| \mathbf{x}_i\right) p\left(\mathbf{x}_i \middle| \mathbf{x}_{i-1}\right) \times \tag{11}$$
$$\times \int_{\mathbf{x}_{\nu-1}} p\left(\mathbf{x}_\nu \middle| \mathbf{x}_{\nu-1}\right) p\left(\mathbf{y}_{\nu-1} \middle| \mathbf{x}_{\nu-1}\right) \int_{\mathbf{X}_1^{\nu-2}} p\left(\mathbf{x}_{\nu-1} \middle| \mathbf{x}_{\nu-2}\right) \prod_{i=1}^{\nu-2} p\left(\mathbf{y}_i \middle| \mathbf{x}_i\right) p\left(\mathbf{x}_i \middle| \mathbf{x}_{i-1}\right) \mathrm{d}\,\mathbf{X}_1^{\nu-2}\, \mathrm{d}\,\mathbf{x}_{\nu-1}.$$

Из (10) можно выразить интеграл:

$$\int_{\mathbf{X}_1^{\nu-2}} p\left(\mathbf{x}_{\nu-1} \middle| \mathbf{x}_{\nu-2}\right) \prod_{i=1}^{\nu-2} p\left(\mathbf{y}_i \middle| \mathbf{x}_i\right) p\left(\mathbf{x}_i \middle| \mathbf{x}_{i-1}\right) \mathrm{d}\,\mathbf{X}_1^{\nu-2} =$$
$$= \frac{p\left(\mathbf{X}_{\nu-1}^{k-1} \middle| \mathbf{Y}_1^{k-1}\right)}{c_1 \cdot p\left(\mathbf{y}_{\nu-1} \middle| \mathbf{x}_{\nu-1}\right) \cdot \prod_{i=\nu}^{k-1} p\left(\mathbf{y}_i \middle| \mathbf{x}_i\right) p\left(\mathbf{x}_i \middle| \mathbf{x}_{i-1}\right)}. \tag{12}$$

Подставляя (12) в (11) получим (где $c_2 = c / c_1$):

$$p\left(\mathbf{X}_\nu^k \middle| \mathbf{Y}_1^k\right) = c \cdot p\left(\mathbf{y}_\nu \middle| \mathbf{x}_\nu\right) \cdot \prod_{i=\nu+1}^{k} p\left(\mathbf{y}_i \middle| \mathbf{x}_i\right) p\left(\mathbf{x}_i \middle| \mathbf{x}_{i-1}\right) \times$$
$$\times \int_{\mathbf{x}_{\nu-1}} p\left(\mathbf{x}_\nu \middle| \mathbf{x}_{\nu-1}\right) p\left(\mathbf{y}_{\nu-1} \middle| \mathbf{x}_{\nu-1}\right) \cdot \tag{13}$$
$$\cdot \frac{p\left(\mathbf{X}_{\nu-1}^{k-1} \middle| \mathbf{Y}_1^{k-1}\right)}{c_1 \cdot p\left(\mathbf{y}_{\nu-1} \middle| \mathbf{x}_{\nu-1}\right) \cdot \prod_{i=\nu}^{k-1} p\left(\mathbf{y}_i \middle| \mathbf{x}_i\right) p\left(\mathbf{x}_i \middle| \mathbf{x}_{i-1}\right)} \mathrm{d}\,\mathbf{x}_{\nu-1} =$$

$$= c_2 \cdot p\left(\mathbf{y}_\nu \middle| \mathbf{x}_\nu\right) \cdot \frac{\prod\limits_{i=\nu+1}^{k} p\left(\mathbf{y}_i \middle| \mathbf{x}_i\right) p\left(\mathbf{x}_i \middle| \mathbf{x}_{i-1}\right)}{\prod\limits_{i=\nu+1}^{k-1} p\left(\mathbf{y}_i \middle| \mathbf{x}_i\right) p\left(\mathbf{x}_i \middle| \mathbf{x}_{i-1}\right)} \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{\mathbf{x}_{\nu-1}} p\left(\mathbf{x}_\nu \middle| \mathbf{x}_{\nu-1}\right) \frac{p\left(\mathbf{X}_{\nu-1}^{k-1} \middle| \mathbf{Y}_1^{k-1}\right)}{p\left(\mathbf{y}_\nu \middle| \mathbf{x}_\nu\right) p\left(\mathbf{x}_\nu \middle| \mathbf{x}_{\nu-1}\right)} \mathrm{d}\,\mathbf{x}_{\nu-1} =$$

$$= c_2 \cdot p\left(\mathbf{y}_k \middle| \mathbf{x}_k\right) p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{x}_{k-1}\right) \cdot \int\limits_{\mathbf{x}_{\nu-1}} p\left(\mathbf{X}_{\nu-1}^{k-1} \middle| \mathbf{Y}_1^{k-1}\right) \mathrm{d}\,\mathbf{x}_{\nu-1},$$

Рекуррентное уравнение для эволюции АПВ $p\left(\mathbf{X}_\nu^k \middle| \mathbf{Y}_1^k\right)$:

$$\boxed{\begin{aligned} &p\left(\mathbf{X}_\nu^k \middle| \mathbf{Y}_1^k\right) = c_2 \cdot p\left(\mathbf{y}_k \middle| \mathbf{x}_k\right) p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{x}_{k-1}\right) \cdot \int\limits_{\mathbf{x}_{\nu-1}} p\left(\mathbf{X}_{\nu-1}^{k-1} \middle| \mathbf{Y}_1^{k-1}\right) \mathrm{d}\,\mathbf{x}_{\nu-1}, \\ &p\left(\mathbf{x}_\nu \middle| \mathbf{Y}_1^k\right) = \int\limits_{\mathbf{X}_{\nu+1}^k} p\left(\mathbf{X}_\nu^k \middle| \mathbf{Y}_1^k\right) \mathrm{d}\,\mathbf{X}_{\nu+1}^k. \end{aligned}} \tag{14}$$

Приложение 3
Вывод итогового алгоритма для нахождения оценки $\hat{\mathbf{X}}_\nu^k$

Решим уравнения (14) для первого и второго момента АПВ $p\left(\mathbf{X}_\nu^k \middle| \mathbf{Y}_1^k\right)$. Для этого конкретизируем вид расширенного вектора состояния:

$$\mathbf{X}_\nu^k = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_\nu \\ \vdots \\ \mathbf{x}_k \end{vmatrix} \tag{15}$$

Апостериорную дисперсию данного вектора обозначим как $\mathbf{D}_{\mathbf{X},k}$.

АПВ $p\left(\mathbf{X}_\nu^k \middle| \mathbf{Y}_1^k\right)$ является гауссовской функцией:

$$p\left(\mathbf{X}_\nu^k \middle| \mathbf{Y}_1^k\right) = \frac{1}{(2\pi)^{L/2}\sqrt{\det\left(\mathbf{D}_{\mathbf{X},k}\right)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\mathbf{X}_\nu^k - \hat{\mathbf{X}}_\nu^k\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{D}_{\mathbf{X},k}^{-1} \left(\mathbf{X}_\nu^k - \hat{\mathbf{X}}_\nu^k\right)\right\} \tag{16}$$

где $L = N \cdot (k - \nu + 1)$ - размерность вектора состояния $\mathbf{X}_\nu^k$.

$$p\left(\mathbf{y}_k \middle| \mathbf{x}_k\right) = \frac{1}{(2\pi)^{M/2}\sqrt{\det\left(\mathbf{D}_n\right)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k\right)^T \mathbf{D}_n^{-1} \left(\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k\right)\right\} \tag{17}$$

$$p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{x}_{k-1}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\mathrm{N}/2}\sqrt{\det\left(\mathbf{D}_\xi\right)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\mathbf{x}_k - \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1}\right)^T \mathbf{D}_\xi^{-1} \left(\mathbf{x}_k - \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1}\right)\right\} \tag{18}$$

Для нахождения $\int\limits_{\mathbf{x}_{\nu-1}} p\left(\mathbf{X}_{\nu-1}^{k-1} \middle| \mathbf{Y}_1^{k-1}\right) \mathrm{d}\,\mathbf{x}_{\nu-1}$ можно воспользоваться следующими математическими соотношениями:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}+c\right\}\mathrm{d}\,\mathbf{x}= \\ =\sqrt{\frac{\pi}{\det(\mathbf{A})}}\exp\left\{\frac{1}{4}\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}+c\right\} \tag{19}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}\end{vmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{vmatrix}\mathbf{R}_{xx} & \mathbf{R}_{xy}\\ \mathbf{R}_{xy}^{\mathrm{T}} & \mathbf{R}_{yy}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}\end{vmatrix}\right\}\mathrm{d}\,\mathbf{x}= \\ =\sqrt{\frac{2^{n_x}\pi}{\det\left(\mathbf{R}_{xx}\right)}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{R}_{yy}-\mathbf{R}_{xy}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{R}_{xy}\right)\mathbf{y}\right\} \tag{20}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}\end{vmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{vmatrix}\mathbf{R}_{xx} & \mathbf{R}_{xy}\\ \mathbf{R}_{xy}^{\mathrm{T}} & \mathbf{R}_{yy}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}\end{vmatrix}\right\}\mathrm{d}\,\mathbf{y}= \\ =\sqrt{\frac{2^{n_y}\pi}{\det\left(\mathbf{R}_{yy}\right)}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{R}_{xx}-\mathbf{R}_{xy}\mathbf{R}_{yy}^{-1}\mathbf{R}_{xy}^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{x}\right\} \tag{21}$$

В (20) применяется подстановка $\left(\mathbf{X}_{\nu-1}^{k-1}-\hat{\mathbf{X}}_{\nu-1}^{k-1}\right)\to\begin{vmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}\end{vmatrix}$ так что $\left(\mathbf{x}_{\nu-1}-\hat{\mathbf{x}}_{\nu-1}\right)\to\mathbf{x}$, $\left(\mathbf{X}_{\nu}^{k-1}-\hat{\mathbf{X}}_{\nu}^{k-1}\right)\to\mathbf{y}$, $\mathbf{D}_{\mathbf{X},k-1}^{-1}\to\begin{vmatrix}\mathbf{R}_{xx} & \mathbf{R}_{xy}\\ \mathbf{R}_{xy}^{\mathrm{T}} & \mathbf{R}_{yy}\end{vmatrix}$.

$$\int\limits_{\mathbf{x}_{\nu-1}} p\left(\mathbf{X}_{\nu-1}^{k-1}\middle|\mathbf{Y}_1^{k-1}\right)\mathrm{d}\,\mathbf{x}_{\nu-1}=\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\mathbf{X}_{\nu}^{k-1}-\hat{\mathbf{X}}_{\nu}^{k-1}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\left(\mathbf{X}_{\nu}^{k-1}-\hat{\mathbf{X}}_{\nu}^{k-1}\right)\right\}}{\sqrt{2^{L-N}\pi^{L-1}\det\left(\mathbf{D}_{\mathbf{X},k-1}\right)\det\left(\mathbf{R}_{xx}\right)}} \tag{22}$$

где $\mathbf{A}=\left(\mathbf{R}_{yy}-\mathbf{R}_{xy}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{R}_{xy}\right)$.

Подставляя (19)-(21) в (14), получим, что с одной стороны:

$$\ln p\left(\mathbf{X}_{\nu}^{k}\middle|\mathbf{Y}_1^{k}\right)=c_5-\frac{1}{2}\left(\mathbf{X}_{\nu}^{k}-\hat{\mathbf{X}}_{\nu}^{k}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_{\mathbf{X},k}^{-1}\left(\mathbf{X}_{\nu}^{k}-\hat{\mathbf{X}}_{\nu}^{k}\right) \tag{23}$$

с другой стороны:

$$
\begin{aligned}
&\ln p\left(\mathbf{X}_\nu^k \middle| \mathbf{Y}_1^k\right) = c_6 - \frac{1}{2}\left(\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k\right)^T \mathbf{D}_n^{-1}\left(\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k\right) - \\
&-\frac{1}{2}\left(\mathbf{x}_k - \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1}\right)^T \mathbf{D}_\xi^{-1}\left(\mathbf{x}_k - \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1}\right) - \frac{1}{2}\left(\mathbf{X}_\nu^{k-1} - \hat{\mathbf{X}}_\nu^{k-1}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{A}\left(\mathbf{X}_\nu^{k-1} - \hat{\mathbf{X}}_\nu^{k-1}\right).
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Приравнивая (23) и (24) получим:

$$
\begin{aligned}
&\left(\mathbf{X}_\nu^k - \hat{\mathbf{X}}_\nu^k\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{D}_{\mathbf{X},k}^{-1}\left(\mathbf{X}_\nu^k - \hat{\mathbf{X}}_\nu^k\right) = c_7 + \left(\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k\right)^T \mathbf{D}_n^{-1}\left(\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k\right) + \\
&+\left(\mathbf{x}_k - \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1}\right)^T \mathbf{D}_\xi^{-1}\left(\mathbf{x}_k - \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1}\right) + \left(\mathbf{X}_\nu^{k-1} - \hat{\mathbf{X}}_\nu^{k-1}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{A}\left(\mathbf{X}_\nu^{k-1} - \hat{\mathbf{X}}_\nu^{k-1}\right) = \\
&= c_8 - 2\mathbf{y}_k{}^T\mathbf{D}_n{}^{-1}\mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{x}_k{}^T\mathbf{H}_k{}^T\mathbf{D}_n{}^{-1}\mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{x}_k{}^T\mathbf{D}_\xi{}^{-1}\mathbf{x}_k + \mathbf{x}_{k-1}{}^T\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi{}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1} - \\
&-\mathbf{x}_k{}^T\mathbf{D}_\xi{}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{x}_{k-1}{}^T\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi{}^{-1}\mathbf{x}_k + \left(\mathbf{X}_\nu^{k-1}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{A}\mathbf{X}_\nu^{k-1} - 2\left(\hat{\mathbf{X}}_\nu^{k-1}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}}_\nu^{k-1}.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Пусть:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{x}_k = \mathbf{c}_k\mathbf{X}_\nu^k,\ \text{где } \mathbf{c}_k = \left|\mathbf{0}_{N\times(L-N)}\ \mathbf{I}_N\right|, \\
&\mathbf{x}_{k-1} = \mathbf{c}_{k-1}\mathbf{X}_\nu^k,\ \text{где } \mathbf{c}_{k-1} = \left|\mathbf{0}_{N\times(L-2N)}\ \mathbf{I}_N\ \mathbf{0}_{N\times N}\right|, \\
&\mathbf{X}_\nu^{k-1} = \mathbf{c}_\nu\mathbf{X}_\nu^k,\ \text{где } \mathbf{c}_\nu = \left|\mathbf{I}_{(L-N)\times(L-N)}\ \mathbf{0}_{(L-N)\times N}\right|,
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Тогда:

$$
\begin{aligned}
&\left(\mathbf{X}_\nu^k - \hat{\mathbf{X}}_\nu^k\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{D}_{\mathbf{X},k}^{-1}\left(\mathbf{X}_\nu^k - \hat{\mathbf{X}}_\nu^k\right) = c_8 - 2\mathbf{y}_k{}^T\mathbf{D}_n{}^{-1}\mathbf{H}_k\mathbf{c}_k\mathbf{X}_\nu^k + \\
&+\left(\mathbf{X}_\nu^k\right)^T \mathbf{c}_k{}^T\left[\mathbf{H}_k{}^T\mathbf{D}_n{}^{-1}\mathbf{H}_k + \mathbf{D}_\xi{}^{-1}\right]\mathbf{c}_k\mathbf{X}_\nu^k - \\
&-\left(\mathbf{X}_\nu^k\right)^T \mathbf{c}_k{}^T\mathbf{D}_\xi{}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{c}_{k-1}\mathbf{X}_\nu^k - \left(\mathbf{X}_\nu^k\right)^T \mathbf{c}_{k-1}{}^T\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi{}^{-1}\mathbf{c}_k\mathbf{X}_\nu^k + \\
&+\left(\mathbf{X}_\nu^k\right)^T \mathbf{c}_{k-1}{}^T\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi{}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{c}_{k-1}\mathbf{X}_\nu^k + \left(\mathbf{X}_\nu^k\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{c}_\nu{}^T\mathbf{A}\mathbf{c}_\nu\mathbf{X}_\nu^k - 2\left(\hat{\mathbf{X}}_\nu^{k-1}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{A}\mathbf{c}_\nu\mathbf{X}_\nu^k = \\
&= c_8 - 2\left[\mathbf{y}_k{}^T\mathbf{D}_n{}^{-1}\mathbf{H}_k\mathbf{c}_k + \left(\hat{\mathbf{X}}_\nu^{k-1}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{A}\mathbf{c}_\nu\right]\mathbf{X}_\nu^k + \\
&+\left(\mathbf{X}_\nu^k\right)^T \begin{bmatrix} \mathbf{c}_k{}^T\left[\mathbf{H}_k{}^T\mathbf{D}_n{}^{-1}\mathbf{H}_k + \mathbf{D}_\xi{}^{-1}\right]\mathbf{c}_k + \mathbf{c}_{k-1}{}^T\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi{}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{c}_{k-1} + \\ +\mathbf{c}_\nu{}^T\mathbf{A}\mathbf{c}_\nu - \mathbf{c}_k{}^T\mathbf{D}_\xi{}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{c}_{k-1} - \mathbf{c}_{k-1}{}^T\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi{}^{-1}\mathbf{c}_k \end{bmatrix}\mathbf{X}_\nu^k = \\
&= \left(\mathbf{X}_\nu^k\right)^T \mathbf{D}_{\mathbf{X},k}^{-1}\mathbf{X}_\nu^k - 2\left(\hat{\mathbf{X}}_\nu^k\right)^T \mathbf{D}_{\mathbf{X},k}^{-1}\mathbf{X}_\nu^k + \hat{\mathbf{X}}_\nu^k\mathbf{D}_{\mathbf{X},k}^{-1}\hat{\mathbf{X}}_\nu^k
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Из (27) следует, что:

$$\mathbf{D}_{\mathbf{X},k}^{-1} = \mathbf{c}_k{}^T\left[\mathbf{H}_k{}^T\mathbf{D}_n{}^{-1}\mathbf{H}_k + \mathbf{D}_\xi{}^{-1}\right]\mathbf{c}_k + \mathbf{c}_{k-1}{}^T\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi{}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{c}_{k-1} +$$
$$+\mathbf{c}_\nu{}^T\mathbf{A}\mathbf{c}_\nu - \mathbf{c}_k{}^T\mathbf{D}_\xi{}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{c}_{k-1} - \mathbf{c}_{k-1}{}^T\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi{}^{-1}\mathbf{c}_k,$$

$$\left(\hat{\mathbf{X}}_\nu^k\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_{\mathbf{X},k}^{-1} = \left(\mathbf{y}_k{}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_n{}^{-1}\mathbf{H}_k\mathbf{c}_k + \left(\hat{\mathbf{X}}_\nu^{k-1}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{c}_\nu\right),$$
$$\mathbf{D}_{\mathbf{X},k}^{-1}\hat{\mathbf{X}}_\nu^k = \left(\mathbf{y}_k{}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_n{}^{-1}\mathbf{H}_k\mathbf{c}_k + \left(\hat{\mathbf{X}}_\nu^{k-1}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{c}_\nu\right)^{\mathrm{T}}, \tag{28}$$
$$\hat{\mathbf{X}}_\nu^k = \mathbf{D}_{\mathbf{X},k}\left(\mathbf{c}_k{}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}_k{}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_n{}^{-1}\mathbf{y}_k + \mathbf{c}_\nu{}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\hat{\mathbf{X}}_\nu^{k-1}\right).$$

Для удобства изложим итоговый алгоритм нахождения оценки $\hat{\mathbf{X}}_\nu^k$ пользуясь блочным представлением векторов и матриц.

1. Вводится расширенный вектор состояния

$\mathbf{X}_\nu^k = \left|\mathbf{x}_\nu^{\mathrm{T}} \ldots \mathbf{x}_k^{\mathrm{T}}\right|^{\mathrm{T}}$ размерностью $L = N\cdot(k-\nu+1)$ с матрицей апостериорных дисперсий $\mathbf{D}_{\mathbf{X},k}$ размерностью $L\times L$.

2. Обратная матрица дисперсий на $(k-1)$-м шаге представлется в виде блочной матрицы

$\mathbf{D}_{\mathbf{X},k-1}^{-1} = \begin{vmatrix}\mathbf{R}_{xx} & \mathbf{R}_{xy}\\ \mathbf{R}_{xy}^{\mathrm{T}} & \mathbf{R}_{yy}\end{vmatrix}$, где $\mathbf{R}_{xx}$ – матрица размерности $N\times N$, $\mathbf{R}_{yy}$ – матрица размерности $(L-N)\times(L-N)$, $\mathbf{R}_{xy}$ – матрица размерности $N\times(L-N)$.

Рассчитывается матрица

$$\mathbf{A} = \left(\mathbf{R}_{yy} - \mathbf{R}_{xy}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{R}_{xy}\right). \tag{29}$$

3. Рассчитывается матрица апостериорных дисперсий на шаге k

$$\mathbf{D}_{\mathbf{X},k}^{-1} = \begin{vmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}_{(L-N)\times N}\\ \mathbf{0}_{N\times(L-N)} & \mathbf{0}_{N\times N}\end{vmatrix} +$$
$$+\begin{vmatrix}\mathbf{0}_{(L-2N)\times(L-2N)} & & \mathbf{0}_{(L-2N)\times(2N)}\\ & \mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi{}^{-1}\mathbf{F} & -\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi{}^{-1}\\ \mathbf{0}_{(2N)\times(L-2N)} & -\mathbf{D}_\xi{}^{-1}\mathbf{F} & \left[\mathbf{H}_k{}^T\mathbf{D}_n{}^{-1}\mathbf{H}_k + \mathbf{D}_\xi{}^{-1}\right]\end{vmatrix}$$

4. Рассчитывается искомая оценка $\hat{\mathbf{X}}_\nu^k$ с использованием оценки $\hat{\mathbf{X}}_{\nu-1}^{k-1}$ на предыдущем шаге:

$$\hat{\mathbf{X}}_{\nu}^{k} = \mathbf{D}_{\mathbf{X},k} \cdot \left| \begin{matrix} \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}}_{\nu}^{k-1} \\ \mathbf{H}_{k}{}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_{n}{}^{-1}\mathbf{y}_{k} \end{matrix} \right|$$

Приложение 4
Вывод выражений для нахождения ненормированных плотностей вероятности $p(\mathbf{x}_\nu \mid \mathbf{Y}_1^{\nu-1})$ и $\widehat{p}\left(\boldsymbol{x}_\nu \middle| \boldsymbol{Y}_{\nu+1}^k\right)$

ПВ экстраполированной оценки $p(\mathbf{x}_\nu \mid \mathbf{Y}_1^{\nu-1})$.

Из свойств Марковского процесса:

$$p(\mathbf{x}_a) = \int p(\mathbf{x}_a \mid \mathbf{x}_b) p(\mathbf{x}_b) d\mathbf{x}_b; \tag{30}$$

Воспользуемся этим свойством для ПВ экстраполированной оценки:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_\nu \mid \mathbf{Y}_1^{\nu-1}) &= \int p(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{x}_{\nu-1} \mid \mathbf{Y}_1^{\nu-1}) d\mathbf{x}_{\nu-1} = \\ &= \int p(\mathbf{x}_\nu \mid \mathbf{x}_{\nu-1}, \mathbf{Y}_1^{\nu-1}) \widehat{p}(\mathbf{x}_{\nu-1} \mid \mathbf{Y}_1^{\nu-1}) d\mathbf{x}_{\nu-1}; \end{aligned} \tag{31}$$

Т.к. $\mathbf{x}_\nu$ не зависит от выборки $\mathbf{Y}_1^{\nu-1}$, то:

$$p(\mathbf{x}_\nu \mid \mathbf{Y}_1^{\nu-1}) = \int p(\mathbf{x}_\nu \mid \mathbf{x}_{\nu-1}) \widehat{p}(\mathbf{x}_{\nu-1} \mid \mathbf{Y}_1^{\nu-1}) d\mathbf{x}_{\nu-1}; \tag{32}$$

Где: $p(\mathbf{x}_\nu \mid \mathbf{x}_{\nu-1})$ – ПВ перехода, $\widehat{p}(\mathbf{x}_{\nu-1} \mid \mathbf{Y}_1^{\nu-1})$ – АПВ на предыдущем шаге.

Подставим получившиеся выражения в АПВ $\widehat{p}\left(\mathbf{x}_\nu \middle| \mathbf{Y}_1^\nu\right)$:

$$\widehat{p}\left(\mathbf{x}_\nu \middle| \mathbf{Y}_1^\nu\right) = c_1 \cdot p(\mathbf{y}_\nu \mid \mathbf{x}_\nu) \int p(\mathbf{x}_\nu \mid \mathbf{x}_{\nu-1}) \widehat{p}(\mathbf{x}_{\nu-1} \mid \mathbf{Y}_1^{\nu-1}) d\mathbf{x}_{\nu-1}; \tag{33}$$

Теперь рассмотрим $\widehat{p}\left(\mathbf{x}_\nu \middle| \mathbf{Y}_{\nu+1}^k\right)$. Ненормированную плотность вероятности величины $\mathbf{x}_\nu$, при условии, что известны наблюдения $\mathbf{y}_{\nu+1} ... \mathbf{y}_k$ можно представить как:

$$\widehat{p}\left(\mathbf{x}_{\nu}\middle|\mathbf{Y}_{\nu+1}^{k}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{j=\nu+1}^{k}p(\mathbf{y}_j\,|\,\mathbf{x}_j)\cdot p(\mathbf{x}_j\,|\,\mathbf{x}_{j-1})d\mathbf{X}_{\nu+1}^{k}=$$
$$=\int_{\mathbf{x}_{\kappa}}p(\mathbf{y}_{\kappa}\,|\,\mathbf{x}_{\kappa})\int_{\mathbf{X}_{\nu+1}^{k-1}}p(\mathbf{x}_{\kappa}\,|\,\mathbf{x}_{\kappa-1})\cdot\prod_{j=\nu+1}^{k-1}p(\mathbf{y}_j\,|\,\mathbf{x}_j)\cdot p(\mathbf{x}_j\,|\,\mathbf{x}_{j-1})d\mathbf{x}_{\kappa}d\mathbf{X}_{\nu+1}^{k-1}=$$
$$=\int_{\mathbf{x}_{\kappa}}p(\mathbf{y}_{\kappa}\,|\,\mathbf{x}_{\kappa})\int_{\mathbf{x}_{\kappa-1}}p(\mathbf{x}_{\kappa}\,|\,\mathbf{x}_{\kappa-1})\cdot p(\mathbf{y}_{\kappa-1}\,|\,\mathbf{x}_{\kappa-1})\cdot \tag{34}$$
$$\cdot\int_{\mathbf{X}_{\nu+1}^{k-2}}p(\mathbf{x}_{\kappa-1}\,|\,\mathbf{x}_{\kappa-2})\cdot\prod_{j=\nu+1}^{k-2}p(\mathbf{y}_j\,|\,\mathbf{x}_j)\cdot p(\mathbf{x}_j\,|\,\mathbf{x}_{j-1})d\mathbf{x}_{\kappa}d\mathbf{x}_{\kappa-1}d\mathbf{X}_{\nu+1}^{k-2};$$

Рассмотрим отдельно интеграл $d\mathbf{X}_{\nu+1}^{k-2}$:

$$\int_{\mathbf{X}_{\nu+1}^{k-2}}p(\mathbf{x}_{\kappa-1}\,|\,\mathbf{x}_{\kappa-2})\cdot\prod_{j=\nu+1}^{k-2}p(\mathbf{y}_j\,|\,\mathbf{x}_j)\cdot p(\mathbf{x}_j\,|\,\mathbf{x}_{j-1})d\mathbf{X}_{\nu+1}^{k-2}=$$
$$=\int_{\mathbf{x}_{\kappa-2}}p(\mathbf{x}_{\kappa-1}\,|\,\mathbf{x}_{\kappa-2})\cdot p(\mathbf{y}_{k-2}\,|\,\mathbf{x}_{k-2})\cdot \tag{35}$$
$$\cdot\int_{\mathbf{X}_{\nu+1}^{k-2}}p(\mathbf{x}_{\kappa-2}\,|\,\mathbf{x}_{\kappa-3})\cdot\prod_{j=\nu+1}^{k-3}p(\mathbf{y}_j\,|\,\mathbf{x}_j)\cdot p(\mathbf{x}_j\,|\,\mathbf{x}_{j-1})d\mathbf{x}_{\kappa-2}d\mathbf{X}_{\nu+1}^{k-3};$$

Обозначим выражение, под интегралом $d\mathbf{X}_{\nu+1}^{k-2}$ как ненормированную условную ПВ:

$$\overline{p}(\mathbf{x}_{\kappa-1}\,|\,\mathbf{Y}_{\nu+1}^{k-2},\mathbf{x}_{\nu})=\int_{\mathbf{X}_{\nu+1}^{k-2}}p(\mathbf{x}_{\kappa-1}\,|\,\mathbf{x}_{\kappa-2})\cdot\prod_{j=\nu+1}^{k-2}p(\mathbf{y}_j\,|\,\mathbf{x}_j)\cdot p(\mathbf{x}_j\,|\,\mathbf{x}_{j-1})d\mathbf{X}_{\nu+1}^{k-2}; \tag{36}$$

Тогда, один из множителей в правой части можно обозначить как:

$$\overline{p}(\mathbf{x}_{\kappa-2}\,|\,\mathbf{Y}_{\nu+1}^{k-3},\mathbf{x}_{\nu})=\int_{\mathbf{X}_{\nu+1}^{k-3}}p(\mathbf{x}_{\kappa-2}\,|\,\mathbf{x}_{\kappa-3})\cdot\prod_{j=\nu+1}^{k-3}p(\mathbf{y}_j\,|\,\mathbf{x}_j)\cdot p(\mathbf{x}_j\,|\,\mathbf{x}_{j-1})d\mathbf{X}_{\nu+1}^{k-3}; \tag{37}$$

Можно записать общую формулу для ненормированной условной ПВ:

Для $i \ni [2,k-\nu]$:

$$\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+i} \mid \mathbf{Y}_{\nu+1}^{\nu+i-1}, \mathbf{x}_{\nu}) = \int\limits_{\mathbf{X}_{\nu+1}^{k+i-1}} p(\mathbf{x}_{\nu+i} \mid \mathbf{x}_{\nu+i-1}) \cdot \prod_{j=\nu+1}^{\nu+i-1} p(\mathbf{y}_j \mid \mathbf{x}_j) \cdot p(\mathbf{x}_j \mid \mathbf{x}_{j-1}) d\mathbf{X}_{\nu+1}^{\nu+i-1}; \qquad (38)$$

Тогда для **шага i = 2**:

$$\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+2} \mid \mathbf{Y}_{\nu+1}, \mathbf{x}_{\nu}) = \int\limits_{\mathbf{x}_{\nu+1}} p(\mathbf{x}_{\nu+2} \mid \mathbf{x}_{\nu+1}) \cdot p(\mathbf{y}_{\nu+1} \mid \mathbf{x}_{\nu+1}) \cdot p(\mathbf{x}_{\nu+1} \mid \mathbf{x}_{\nu}) d\mathbf{x}_{\nu+1}; \qquad (39)$$

Для **шага i = (k - ν)**:

$$\overline{p}(\mathbf{x}_k \mid \mathbf{Y}_{\nu+1}^{k-1}, \mathbf{x}_{\nu}) = \int\limits_{\mathbf{x}_{k-1}} p(\mathbf{x}_k \mid \mathbf{x}_{k-1}) \cdot p(\mathbf{y}_{k-1} \mid \mathbf{x}_{k-1}) \cdot \overline{p}(\mathbf{x}_{k-1} \mid \mathbf{Y}_{\nu+1}^{k-2}, \mathbf{x}_{\nu}) d\mathbf{x}_{k-1};$$

$$\widehat{p}\left(\mathbf{x}_{\nu} \middle| \mathbf{Y}_{\nu+1}^{k}\right) = \int\limits_{\mathbf{x}_{\kappa}} p(\mathbf{y}_{\kappa} \mid \mathbf{x}_{\kappa}) \cdot \overline{p}(\mathbf{x}_k \mid \mathbf{Y}_{\nu+1}^{k-1}, \mathbf{x}_{\nu}) d\mathbf{x}_{\kappa}; \qquad (40)$$

Выражения (39)-(40) позволяют рекуррентным образом находить функцию $\overline{p}(\mathbf{x}_k \mid \mathbf{Y}_{\nu+1}^{k-1}, \mathbf{x}_{\nu})$, которая на последнем шаге дает искомую плотность вероятности $\widehat{p}\left(\mathbf{x}_{\nu} \middle| \mathbf{Y}_{\nu+1}^{k}\right)$.

Приложение 5
Получение выражения для ненормированной условной плотности вероятности $\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+i} \mid \mathbf{Y}_{\nu+1}^{\nu+i-1}, \mathbf{x}_{\nu})$ с учетом Гауссова распределения ПВ входящих в ее состав

Ненормированная условная ПВ $\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+i} \mid \mathbf{Y}_{\nu+1}^{\nu+i-1}, \mathbf{x}_{\nu})$.

Запишем выражения для плотностей вероятности входящих в ненормированную условную ПВ $\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+i} \mid \mathbf{Y}_{\nu+1}^{\nu+i-1}, \mathbf{x}_{\nu})$ при $i=2$ с учетом Гауссова распределения, обусловленного шумом наблюдения.

Для $i=2$;

$$\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+2} \mid \mathbf{Y}_{\nu+1}, \mathbf{x}_{\nu}) = \int\limits_{\mathbf{x}_{\nu+1}} p(\mathbf{x}_{\nu+2} \mid \mathbf{x}_{\nu+1}) \cdot p(\mathbf{y}_{\nu+1} \mid \mathbf{x}_{\nu+1}) \cdot p(\mathbf{x}_{\nu+1} \mid \mathbf{x}_{\nu}) d\mathbf{x}_{\nu+1}; \tag{41}$$

$$p(\mathbf{x}_{\nu+2} \mid \mathbf{x}_{\nu+1}) = \frac{1}{2\pi^{N/2}\sqrt{\det(\mathbf{D}_{\xi})}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot (\mathbf{x}_{\nu+2} - \mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+1})^{T} \mathbf{D}_{\xi}^{-1} (\mathbf{x}_{\nu+2} - \mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+1})\right\};$$

$$p(\mathbf{x}_{\nu+1} \mid \mathbf{x}_{\nu}) = \frac{1}{2\pi^{N/2}\sqrt{\det(\mathbf{D}_{\xi})}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot (\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu})^{T} \mathbf{D}_{\xi}^{-1} (\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu})\right\}; \tag{42}$$

$$p(\mathbf{y}_{\nu+1} \mid \mathbf{x}_{\nu+1}) = \frac{1}{2\pi^{M/2}\sqrt{\det(\mathbf{D}_{n})}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot (\mathbf{y}_{\nu+1} - \mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+1})^{T} \mathbf{D}_{n}^{-1} (\mathbf{y}_{\nu+1} - \mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+1})\right\};$$

Где: N – размерность вектора состояний **x**, M – размерность вектора наблюдений **y**.

Подставим уравнения (42) в (41):

$$\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+2} \mid \mathbf{Y}_{\nu+1}, \mathbf{x}_{\nu}) = C_2 \cdot \int\limits_{\mathbf{x}_{\nu+1}} [\exp\{-\frac{1}{2} \cdot [(\mathbf{x}_{\nu+2} - \mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+1})^{T} \mathbf{D}_{\xi}^{-1} (\mathbf{x}_{\nu+2} - \mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+1}) +$$
$$+(\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu})^{T} \mathbf{D}_{\xi}^{-1} (\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu}) + (\mathbf{y}_{\nu+1} - \mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+1})^{T} \mathbf{D}_{n}^{-1} (\mathbf{y}_{\nu+1} - \mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+1})]\} d\mathbf{x}_{\nu+1}]; \tag{43}$$

$$\text{Где}: C_2 = \frac{1}{2\pi^{(M+2N)/2}\sqrt{2 \cdot \det(\mathbf{D}_{\xi}) \cdot \det(\mathbf{D}_{n})}};$$

Раскроем скобки в уравнении (43):

$$\begin{aligned}&(\mathbf{x}_{\nu+2}-\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+1})^T\mathbf{D}_\xi^{-1}(\mathbf{x}_{\nu+2}-\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+1})=\\&=(\mathbf{x}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}-(\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+1})^T\mathbf{D}_\xi^{-1})(\mathbf{x}_{\nu+2}-\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+1})=\\&=\mathbf{x}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2}-\mathbf{x}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+1}-(\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+1})^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2}+(\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+1})^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+1};\end{aligned}\tag{44}$$

$$\begin{aligned}&(\mathbf{x}_{\nu+1}-\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu})^T\mathbf{D}_\xi^{-1}(\mathbf{x}_{\nu+1}-\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu})=\\&=(\mathbf{x}_{\nu+1}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}-(\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu})^T\mathbf{D}_\xi^{-1})(\mathbf{x}_{\nu+1}-\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu})=\\&=\mathbf{x}_{\nu+1}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+1}-\mathbf{x}_{\nu+1}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu}-(\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu})^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+1}+(\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu})^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu};\end{aligned}\tag{45}$$

$$\begin{aligned}&(\mathbf{y}_{\nu+1}-\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+1})^T\mathbf{D}_n^{-1}(\mathbf{y}_{\nu+1}-\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+1})=\\&=(\mathbf{y}_{\nu+1}^T\mathbf{D}_n^{-1}-(\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+1})^T\mathbf{D}_n^{-1})(\mathbf{y}_{\nu+1}-\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+1})=\\&=\mathbf{y}_{\nu+1}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+1}-\mathbf{y}_{\nu+1}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+1}-(\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+1})^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+1}+(\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+1})^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+1};\end{aligned}\tag{46}$$

Все слагаемые в формулах (44)-(46) содержащие $\mathbf{x}_{\nu+1}$ и не содержащие $\mathbf{x}_{\nu+1}^T$:

$$-\mathbf{y}_{\nu+1}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+1}-(\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu})^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+1}-\mathbf{x}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+1};\tag{47}$$

Все слагаемые в формулах (44)-(46) не содержащие $\mathbf{x}_{\nu+1}$ и содержащие $\mathbf{x}_{\nu+1}^T$:

$$-(\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+1})^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+1}-\mathbf{x}_{\nu+1}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu}-(\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+1})^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2};\tag{48}$$

Все слагаемые в формулах (44)-(46) содержащие $\mathbf{x}_{\nu+1}$ и содержащие $\mathbf{x}_{\nu+1}^T$:

$$(\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+1})^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+1}+\mathbf{x}_{\nu+1}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+1}+(\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+1})^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+1};\tag{49}$$

Все слагаемые в формулах (44)-(46) не содержащие $\mathbf{x}_{\nu+1}$ и не содержащие $\mathbf{x}_{\nu+1}^T$

$$\mathbf{y}_{\nu+1}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+1}+(\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu})^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu}+\mathbf{x}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2};\tag{50}$$

Подставим формулы (47)-(50) в (43):

$$\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+2} \mid \mathbf{Y}_{\nu+1}, \mathbf{x}_{\nu}) = \frac{1}{2\pi^{(M+2N)/2}\sqrt{2\cdot\det(\mathbf{D}_{\xi})\cdot\det(\mathbf{D}_{n})}}\cdot$$

$$\begin{aligned}
&\cdot\int\limits_{\mathbf{x}_{\nu+1}} \exp\{-\frac{1}{2}\cdot[\mathbf{x}_{\nu+1}^{T}(\mathbf{H}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{H}+\mathbf{D}_{\xi}^{-1}+\mathbf{F}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F})\mathbf{x}_{\nu+1}- \\
&-2(\mathbf{H}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{y}_{\nu+1}+\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu}+\mathbf{F}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2})^{T}\mathbf{x}_{\nu+1}+ \\
&+(\mathbf{y}_{\nu+1}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{y}_{\nu+1}+(\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu})^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu}+\mathbf{x}_{\nu+2}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2})]\}d\mathbf{x}_{\nu+1}
\end{aligned} \qquad (51)$$

Далее воспользуемся формулой (без доказательства):

$$\int \exp\left\{-\mathbf{x}^{T}\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}^{T}\mathbf{x}+\mathbf{c}\right\}d\mathbf{x} = \sqrt{\frac{\pi}{\det(\mathbf{A})}}\exp\left\{\frac{1}{4}\mathbf{b}^{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}+\mathbf{c}\right\}; \qquad (52)$$

Выразим слагаемые под экспонентой из левой части формулы (52) в соответствии с формулой (51)

$$\begin{aligned}
&-\mathbf{x}^{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = -\mathbf{x}_{\nu+1}^{T}\frac{1}{2}(\mathbf{H}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{H}+\mathbf{D}_{\xi}^{-1}+\mathbf{F}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F})\mathbf{x}_{\nu+1}; \\
&\mathbf{b}^{T}\mathbf{x} = (\mathbf{H}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{y}_{\nu+1}+\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu}+\mathbf{F}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2})^{T}\mathbf{x}_{\nu+1}; \\
&\mathbf{c} = -\frac{1}{2}(\mathbf{y}_{\nu+1}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{y}_{\nu+1}+(\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu})^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu}+\mathbf{x}_{\nu+2}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2});
\end{aligned} \qquad (53)$$

Воспользуемся левой частью формулы (52) и подставим в уравнение (51):

$$\begin{aligned}
&\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+2} \mid \mathbf{Y}_{\nu+1}, \mathbf{x}_{\nu}) = 2\pi^{(1-M-2N)/2}\cdot(2\cdot\det(\mathbf{D}_{\xi})\cdot\det(\mathbf{D}_{n}))^{-1/2}\cdot \\
&\cdot\det(\mathbf{H}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{H}+\mathbf{D}_{\xi}^{-1}+\mathbf{F}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F})^{-1/2}\cdot \\
&\cdot\exp\{\frac{1}{2}\cdot[(\mathbf{H}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{y}_{\nu+1}+\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu}+\mathbf{F}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2})^{T}\cdot \\
&\cdot(\mathbf{H}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{H}+\mathbf{D}_{\xi}^{-1}+\mathbf{F}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F})^{-1}\cdot \\
&-(\mathbf{y}_{\nu+1}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{y}_{\nu+1}+(\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu})^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu}+\mathbf{x}_{\nu+2}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2})]\}
\end{aligned} \qquad (54)$$

Получим ненормированную условную ПВ $\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+i} \mid \mathbf{Y}_{\nu+1}^{\nu+i-1}, \mathbf{x}_{\nu})$ при $i = 2$:

$$\begin{aligned}
&\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+2} \mid \mathbf{Y}_{\nu+1}, \mathbf{x}_{\nu}) = C_{3}\cdot\exp\{\frac{1}{2}[(\mathbf{H}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{y}_{\nu+1}+\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu}+\mathbf{F}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2})^{T}\cdot \\
&\cdot(\mathbf{H}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{H}+\mathbf{D}_{\xi}^{-1}+\mathbf{F}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F})^{-1}\cdot(\mathbf{H}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{y}_{\nu+1}+\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu}+\mathbf{F}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2})- \\
&-(\mathbf{y}_{\nu+1}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{y}_{\nu+1}+(\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu})^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu}+\mathbf{x}_{\nu+2}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2})]\};
\end{aligned} \qquad (55)$$

$$Где: C_3 = 2\pi^{(1-M-2N)/2} \cdot (2 \cdot \det(\mathbf{D}_\xi) \cdot \det(\mathbf{D}_n))^{-1/2} \cdot$$
$$\cdot \det(\mathbf{H}^T \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{H} + \mathbf{D}_\xi^{-1} + \mathbf{F}^T \mathbf{D}_\xi^{-1} \mathbf{F})^{-1/2};$$

Обозначим:

$$\begin{gathered} \mathbf{D}_{\nu+2} = \mathbf{H}^T \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{H} + \mathbf{D}_\xi^{-1} + \mathbf{F}^T \mathbf{D}_\xi^{-1} \mathbf{F}; \\ \mathbf{M}_{\nu+2} = \mathbf{H}^T \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{y}_{\nu+1} + \mathbf{D}_\xi^{-1} \mathbf{F} \mathbf{x}_\nu; \\ \mathbf{S}_{\nu+2} = \mathbf{y}_{\nu+1}^T \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{y}_{\nu+1}; \\ \mathbf{R}_{\nu+2} = (\mathbf{F}\mathbf{x}_\nu)^T \mathbf{D}_\xi^{-1} \mathbf{F} \mathbf{x}_\nu; \end{gathered} \tag{56}$$

Подставим (56) в уравнение (55):

$$\begin{gathered} \overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+2} \mid \mathbf{Y}_{\nu+1}, \mathbf{x}_\nu) = C_3 \cdot \exp\{\frac{1}{2} \cdot [(\mathbf{F}^T \mathbf{D}_\xi^{-1} \mathbf{x}_{\nu+2} + \mathbf{M}_{\nu+2})^T \cdot (\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1} \cdot \\ \cdot (\mathbf{F}^T \mathbf{D}_\xi^{-1} \mathbf{x}_{\nu+2} + \mathbf{M}_{\nu+2}) - (\mathbf{x}_{\nu+2}^T \mathbf{D}_\xi^{-1} \mathbf{x}_{\nu+2} + \mathbf{S}_{\nu+2} + \mathbf{R}_{\nu+2})]\}; \end{gathered} \tag{57}$$

Запишем выражения для плотностей вероятности входящих в ненормированную условную ПВ $\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+i} \mid \mathbf{Y}_{\nu+1}^{\nu+i-1}, \mathbf{x}_\nu)$ при $i = 3$ с учетом Гауссова распределения, обусловленного шумом наблюдения.

Для $i = 3$;

$$\begin{aligned} \overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+3} \mid \mathbf{Y}_{\nu+1}^{\nu+2}, \mathbf{x}_\nu) &= \int_{\mathbf{X}_{\nu+1}^{\nu+2}} p(\mathbf{x}_{\nu+3} \mid \mathbf{x}_{\nu+2}) \cdot \prod_{j=\nu+1}^{\nu+2} p(\mathbf{y}_j \mid \mathbf{x}_j) \cdot p(\mathbf{x}_j \mid \mathbf{x}_{j-1}) d\mathbf{X}_{\nu+1}^{\nu+2} = \\ &= \int_{\mathbf{x}_{\nu+2}} p(\mathbf{x}_{\nu+3} \mid \mathbf{x}_{\nu+2}) \cdot p(\mathbf{y}_{\nu+2} \mid \mathbf{x}_{\nu+2}) \cdot \\ &\cdot \int_{\mathbf{x}_{\nu+1}} p(\mathbf{x}_{\nu+2} \mid \mathbf{x}_{\nu+1}) \cdot p(\mathbf{y}_{\nu+1} \mid \mathbf{x}_{\nu+1}) \cdot p(\mathbf{x}_{\nu+1} \mid \mathbf{x}_\nu) d\mathbf{X}_{\nu+1}^{\nu+2} = \\ &= \int_{\mathbf{x}_{\nu+2}} p(\mathbf{x}_{\nu+3} \mid \mathbf{x}_{\nu+2}) \cdot p(\mathbf{y}_{\nu+2} \mid \mathbf{x}_{\nu+2}) \cdot \overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+2} \mid \mathbf{Y}_{\nu+1}, \mathbf{x}_\nu) d\mathbf{x}_{\nu+2}; \end{aligned} \tag{58}$$

$$p(\mathbf{x}_{\nu+3} \mid \mathbf{x}_{\nu+2}) = \frac{1}{2\pi^{N/2} \sqrt{\det(\mathbf{D}_\xi)}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \cdot (\mathbf{x}_{\nu+3} - \mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+2})^T \mathbf{D}_\xi^{-1} (\mathbf{x}_{\nu+3} - \mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+2}) \right\}; \tag{59}$$

$$p(\mathbf{y}_{\nu+2}\,|\,\mathbf{x}_{\nu+2}) = \frac{1}{2\pi^{M/2}\sqrt{\det(\mathbf{D}_n)}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot(\mathbf{y}_{\nu+2}-\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+2})^T\,\mathbf{D}_n^{-1}(\mathbf{y}_{\nu+2}-\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+2})\right\};$$

Подставим уравнения (57) и (59) в уравнение (58):

$$\begin{gathered}
\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+3}\,|\,\mathbf{Y}_{\nu+1}^{\nu+2},\mathbf{x}_{\nu}) = \int\limits_{\mathbf{x}_{\nu+2}} p(\mathbf{x}_{\nu+3}\,|\,\mathbf{x}_{\nu+2})\cdot p(\mathbf{y}_{\nu+2}\,|\,\mathbf{x}_{\nu+2})\cdot \overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+2}\,|\,\mathbf{Y}_{\nu+1},\mathbf{x}_{\nu})d\mathbf{x}_{\nu+2} = \\
= C_4\cdot\int\limits_{\mathbf{x}_{\nu+2}}\exp\{-\frac{1}{2}\cdot[(\mathbf{x}_{\nu+3}-\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+2})^T\,\mathbf{D}_\xi^{-1}(\mathbf{x}_{\nu+3}-\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+2})+ \\
+(\mathbf{y}_{\nu+2}-\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+2})^T\,\mathbf{D}_n^{-1}(\mathbf{y}_{\nu+2}-\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+2})- \\
-(\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2}+\mathbf{M}_{\nu+2})^T\,(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\cdot(\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2}+\mathbf{M}_{\nu+2})+ \\
+(\mathbf{x}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2}+\mathbf{S}_{\nu+2}+\mathbf{R}_{\nu+2})]\}d\mathbf{x}_{\nu+2};
\end{gathered} \tag{60}$$

$$\mathit{Где}: C_4 = 2\pi^{(1-2M-3N)/2}\cdot(2\cdot\det(\mathbf{D}_\xi)\cdot\det(\mathbf{D}_n))^{-1}\cdot\det(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1/2};$$

Раскроем скобки в уравнении (60):

$$\begin{gathered}
(\mathbf{x}_{\nu+3}-\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+2})^T\,\mathbf{D}_\xi^{-1}(\mathbf{x}_{\nu+3}-\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+2}) = \\
= (\mathbf{x}_{\nu+3}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}-(\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+2})^T\,\mathbf{D}_\xi^{-1})(\mathbf{x}_{\nu+3}-\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+2}) = \\
= \mathbf{x}_{\nu+3}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+3}-\mathbf{x}_{\nu+3}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+2}-(\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+2})^T\,\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+3}+(\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+2})^T\,\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+2};
\end{gathered} \tag{61}$$

$$\begin{gathered}
(\mathbf{y}_{\nu+2}-\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+2})^T\,\mathbf{D}_n^{-1}(\mathbf{y}_{\nu+2}-\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+2}) = \\
= (\mathbf{y}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_n^{-1}-(\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+2})^T\,\mathbf{D}_n^{-1})(\mathbf{y}_{\nu+2}-\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+2}) = \\
= \mathbf{y}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+2}-\mathbf{y}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+2}-(\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+2})^T\,\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+2}+(\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+2})^T\,\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+2};
\end{gathered} \tag{62}$$

$$\begin{gathered}
-(\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2}+\mathbf{M}_{\nu+2})^T\,(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}(\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2}+\mathbf{M}_{\nu+2})+ \\
+(\mathbf{x}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2}+\mathbf{S}_{\nu+2}+\mathbf{R}_{\nu+2}) = \\
= (-\mathbf{M}_{\nu+2}{}^T\,(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}-\mathbf{x}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1})(\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2}+\mathbf{M}_{\nu+2})+ \\
+(\mathbf{x}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2}+\mathbf{S}_{\nu+2}+\mathbf{R}_{\nu+2}) = \\
= -\mathbf{M}_{\nu+2}{}^T\,(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+2}-\mathbf{M}_{\nu+2}{}^T\,(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2}- \\
-\mathbf{x}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+2}-\mathbf{x}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2}+ \\
+\mathbf{x}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2}+\mathbf{S}_{\nu+2}+\mathbf{R}_{\nu+2};
\end{gathered} \tag{63}$$

Все слагаемые в формулах (61)-(63) содержащие $\mathbf{x}_{\nu+2}$ и не содержащие $\mathbf{x}_{\nu+2}^T$:

$$-\mathbf{x}_{\nu+3}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+2}-\mathbf{y}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+2}-\mathbf{M}_{\nu+2}{}^T(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2}; \qquad (64)$$

Все слагаемые в формулах (61)-(63) не содержащие $\mathbf{x}_{\nu+2}$ и содержащие $\mathbf{x}_{\nu+2}^T$:

$$-(\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+2})^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+3}-(\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+2})^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+2}-\mathbf{x}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+2}; \qquad (65)$$

Все слагаемые в формулах (61)-(63) содержащие $\mathbf{x}_{\nu+2}$ и содержащие $\mathbf{x}_{\nu+2}^T$:

$$\begin{aligned}&(\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+2})^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+2}+(\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+2})^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+2}-\\&-\mathbf{x}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2}+\mathbf{x}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2};\end{aligned} \qquad (66)$$

Все слагаемые в формулах (61)-(63) не содержащие $\mathbf{x}_{\nu+2}$ и не содержащие $\mathbf{x}_{\nu+2}^T$:

$$\begin{aligned}&\mathbf{x}_{\nu+3}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+3}+\mathbf{y}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+2}-\\&-\mathbf{M}_{\nu+2}{}^T(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+2}{}^T+\mathbf{S}_{\nu+2}+\mathbf{R}_{\nu+2};\end{aligned} \qquad (67)$$

Подставим формулы (64)-(67) в (60)

$$\begin{aligned}&\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+3}\,|\,\mathbf{Y}_{\nu+1}^{\nu+2},\mathbf{x}_\nu)=\int\limits_{\mathbf{x}_{\nu+2}}p(\mathbf{x}_{\nu+3}\,|\,\mathbf{x}_{\nu+2})\cdot p(\mathbf{y}_{\nu+2}\,|\,\mathbf{x}_{\nu+2})\cdot\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+2}\,|\,\mathbf{Y}_{\nu+1},\mathbf{x}_\nu)d\mathbf{x}_{\nu+2}=\\&=2\pi^{(1-2M-3N)/2}\cdot(2\cdot\det(\mathbf{D}_\xi)\cdot\det(\mathbf{D}_n))^{-1}\cdot\\&\cdot\det(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1/2}\\&\int\limits_{\mathbf{x}_{\nu+2}}\exp\{-\frac{1}{2}\cdot[\mathbf{x}_{\nu+2}^T\cdot(\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}+\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H}-\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}+\mathbf{D}_\xi^{-1})\cdot\mathbf{x}_{\nu+2}-\\&-2\cdot(\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+3}+\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+2}+\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+2})^T\cdot\mathbf{x}_{\nu+2}+\\&+\mathbf{x}_{\nu+3}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+3}+\mathbf{y}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+2}-\mathbf{M}_{\nu+2}{}^T(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+2}+\mathbf{S}_{\nu+2}+\mathbf{R}_{\nu+2}]\}\end{aligned} \qquad (68)$$

Далее воспользуемся формулой (52). Выразим слагаемые под экспонентой из левой части формулы (52) в соответствии с формулой (68):

$$\begin{aligned}&-\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}=-\mathbf{x}_{\nu+1}^T\frac{1}{2}(\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}+\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H}-\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}+\mathbf{D}_\xi^{-1})\mathbf{x}_{\nu+1};\\&\mathbf{b}^T\mathbf{x}=(\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+3}+\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+2}+\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+2})^T\mathbf{x}_{\nu+1};\\&\mathbf{c}=-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_{\nu+3}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+3}+\mathbf{y}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+2}-\mathbf{M}_{\nu+2}{}^T(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+2}+\mathbf{S}_{\nu+2}+\mathbf{R}_{\nu+2});\end{aligned} \qquad (69)$$

Подставим введенные обозначения :

$$-\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = -\mathbf{x}^T_{\nu+1}\frac{1}{2}(\mathbf{D}_{\nu+2} - \mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_{\xi}^{-1})\mathbf{x}_{\nu+1};$$
$$\mathbf{b}^T\mathbf{x} = (\mathbf{F}^T\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{x}_{\nu+3} + \mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+2} + \mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+2})^T\mathbf{x}_{\nu+1}; \tag{70}$$
$$\mathbf{c} = -\frac{1}{2}(\mathbf{x}^T_{\nu+3}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{x}_{\nu+3} + \mathbf{S}_{\nu+2} + \mathbf{y}^T_{\nu+2}\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+2} +$$
$$+\mathbf{R}_{\nu+2} - \mathbf{M}_{\nu+2}{}^T(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+2});$$

Воспользуемся левой частью формулы (52)и подставим в уравнение (68):

$$\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+3} \mid \mathbf{Y}_{\nu+1}^{\nu+2}, \mathbf{x}_{\nu}) = \int\limits_{\mathbf{x}_{\nu+2}} p(\mathbf{x}_{\nu+3} \mid \mathbf{x}_{\nu+2}) \cdot p(\mathbf{y}_{\nu+2} \mid \mathbf{x}_{\nu+2}) \cdot \overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+2} \mid \mathbf{Y}_{\nu+1}, \mathbf{x}_{\nu}) d\mathbf{x}_{\nu+2} =$$
$$= 2\pi^{(2-2M-3N)/2} \cdot (2 \cdot \det(\mathbf{D}_{\xi}) \cdot \det(\mathbf{D}_n))^{-1} \cdot$$
$$\cdot \det(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1/2} \cdot$$
$$\cdot \det(\mathbf{D}_{\nu+2} - \mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_{\xi}^{-1})^{-1/2} \cdot$$
$$\exp\{\frac{1}{2} \cdot [(\mathbf{F}^T\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{x}_{\nu+3} + \mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+2} + \mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+2})^T \cdot \tag{71}$$
$$\cdot(\mathbf{D}_{\nu+2} - \mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_{\xi}^{-1})^{-1} \cdot$$
$$\cdot(\mathbf{F}^T\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{x}_{\nu+3} + \mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+2} + \mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+2}) -$$
$$-(\mathbf{x}^T_{\nu+3}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{x}_{\nu+3} + \mathbf{S}_{\nu+2} + \mathbf{y}^T_{\nu+2}\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+2} + \mathbf{R}_{\nu+2} - \mathbf{M}_{\nu+2}{}^T(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+2})]\}$$

Получим ненормированную условную ПВ $\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+i} \mid \mathbf{Y}_{\nu+1}^{\nu+i-1}, \mathbf{x}_{\nu})$ при $i = 3$:

$$\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+3} \mid \mathbf{Y}_{\nu+1}^{\nu+2}, \mathbf{x}_{\nu}) = C_5 \cdot$$
$$\cdot\exp\{\frac{1}{2} \cdot [(\mathbf{F}^T\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{x}_{\nu+3} + \mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+2} + \mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+2})^T \cdot$$
$$\cdot(\mathbf{D}_{\nu+2} - \mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_{\xi}^{-1})^{-1} \cdot \tag{72}$$
$$\cdot(\mathbf{F}^T\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{x}_{\nu+3} + \mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+2} + \mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+2}) -$$
$$-(\mathbf{x}^T_{\nu+3}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{x}_{\nu+3} + \mathbf{S}_{\nu+2} + \mathbf{y}^T_{\nu+2}\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+2} + \mathbf{R}_{\nu+2} - \mathbf{M}_{\nu+2}{}^T(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+2})]\};$$

$$\text{Где}: C_5 = 2\pi^{(2-2M-3N)/2} \cdot (2 \cdot \det(\mathbf{D}_{\xi}) \cdot \det(\mathbf{D}_n))^{-1} \cdot$$
$$\cdot \det(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1/2} \cdot \det(\mathbf{D}_{\nu+2} - \mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_{\xi}^{-1})^{-1/2};$$

Обозначим:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{D}_{\nu+3} &= \mathbf{D}_{\nu+2} - \mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{F}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1};\\
\mathbf{M}_{\nu+3} &= \mathbf{H}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{y}_{\nu+2} + \mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+2};\\
\mathbf{S}_{\nu+3} &= \mathbf{S}_{\nu+2} + \mathbf{y}_{\nu+2}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{y}_{\nu+2};\\
\mathbf{R}_{\nu+3} &= \mathbf{R}_{\nu+2} - \mathbf{M}_{\nu+2}{}^{T}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+2};
\end{aligned} \tag{73}
$$

Подставим уравнения (73) в уравнение (72):

$$
\begin{gathered}
\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+3} \mid \mathbf{Y}_{\nu+1}^{\nu+2}, \mathbf{x}_{\nu}) = C_5 \cdot \exp\{\frac{1}{2}\cdot[(\mathbf{F}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{x}_{\nu+3} + \mathbf{M}_{\nu+3})^{T}\cdot(\mathbf{D}_{\nu+3})^{-1}\cdot\\
\cdot(\mathbf{F}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{x}_{\nu+3} + \mathbf{M}_{\nu+3}) - (\mathbf{x}_{\nu+3}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{x}_{\nu+3} + \mathbf{S}_{\nu+3} + \mathbf{R}_{\nu+3})]\};
\end{gathered} \tag{74}
$$

Сравним ненормированную условную ПВ $\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+2} \mid \mathbf{Y}_{\nu+1}, \mathbf{x}_{\nu})$ (уравнение (57)) и $\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+3} \mid \mathbf{Y}_{\nu+1}^{\nu+2}, \mathbf{x}_{\nu})$ (уравнение (74)) и выведем общую формулу для ненормированной условной ПВ $\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+i} \mid \mathbf{Y}_{\nu+1}^{\nu+i-1}, \mathbf{x}_{\nu})$ при $i \ni [2, k-\nu]$ с учетом Гауссова распределения, обусловленного шумом наблюдений:

$$
\boxed{
\begin{gathered}
\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+i} \mid \mathbf{Y}_{\nu+1}^{\nu+i-1}, \mathbf{x}_{\nu}) = C_i \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\left[\mathbf{x}_{\nu+i}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{x}_{\nu+i} + \mathbf{S}_{\nu+i} + \mathbf{R}_{\nu+i}\right]\right\}\cdot\\
\cdot\exp\left\{\frac{1}{2}\cdot\left[(\mathbf{F}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{x}_{\nu+i} + \mathbf{M}_{\nu+i})^{T}\cdot\mathbf{D}_{\nu+i}^{-1}\cdot(\mathbf{F}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{x}_{\nu+i} + \mathbf{M}_{\nu+i})\right]\right\};\\
C_i = 2\pi^{\frac{((i-1)-(i-1)M-iN)}{2}}\cdot(2\cdot\det(\mathbf{D}_{\xi})\cdot\det(\mathbf{D}_{n}))^{-\frac{i-1}{2}}\cdot\prod_{j=2}^{i}\det(\mathbf{D}_{\nu+j})^{-1/2};
\end{gathered}
} \tag{75}
$$

Составляющие ПВ $\mathbf{D}_{\nu+i}, \mathbf{M}_{\nu+i}, \mathbf{S}_{\nu+i}, \mathbf{R}_{\nu+i}$ находится итеративно как:

при $i = 2$;	при $i = [3, k-\nu]$;
$\mathbf{D}_{\nu+2} = \mathbf{H}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{H} + \mathbf{D}_{\xi}^{-1} + \mathbf{F}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F};$ $\mathbf{M}_{\nu+2} = \mathbf{H}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{y}_{\nu+1} + \mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu};$ $\mathbf{S}_{\nu+2} = \mathbf{y}_{\nu+1}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{y}_{\nu+1};$ $\mathbf{R}_{\nu+2} = (\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu})^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu};$	$\mathbf{D}_{\nu+i} = \mathbf{D}_{\nu+2} - \mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+i-1})^{-1}\mathbf{F}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1};$ $\mathbf{M}_{\nu+i} = \mathbf{H}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{y}_{\nu+i-1} + \mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+i-1})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+i-1};$ $\mathbf{S}_{\nu+i} = \mathbf{S}_{\nu+i} + \mathbf{y}_{\nu+i-1}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{y}_{\nu+i-1};$ $\mathbf{R}_{\nu+i} = \mathbf{R}_{\nu+i} - \mathbf{M}_{\nu+i-1}{}^{T}(\mathbf{D}_{\nu+i-1})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+i-1};$

(76)

Приложение 6

Получение выражения для ненормированной плотности вероятности $\widehat{p}\left(\mathbf{x}_\nu \middle| \mathbf{Y}_{\nu+1}^{k}\right)$ с учетом Гауссова распределения, обусловленного шумом наблюдений

Ненормированная условная ПВ $\widehat{p}\left(\boldsymbol{x}_\nu \middle| \boldsymbol{Y}_{\nu+1}^{k}\right)$.

Подставим общую формулу для ненормированной условной ПВ $\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+i} \mid \mathbf{Y}_{\nu+1}^{\nu+i-1}, \mathbf{x}_\nu)$ при $i \ni [2, k-\nu]$ (уравнения (75),(76)) в формулу для ненормированную плотность вероятности $\widehat{p}\left(\mathbf{x}_\nu \middle| \mathbf{Y}_{\nu+1}^{k}\right)$ (уравнение (40)):

При $i = k - \nu$;

$$\widehat{p}\left(\mathbf{x}_\nu \middle| \mathbf{Y}_{\nu+1}^{k}\right) = \int_{\mathbf{x}_\kappa} p(\mathbf{y}_\kappa \mid \mathbf{x}_\kappa) \cdot \overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+i} \mid \mathbf{Y}_{\nu+1}^{\nu+i-1}, \mathbf{x}_\nu) d\mathbf{x}_\kappa; \tag{77}$$

С учетом Гауссова распределения шума наблюдений:

$$p(\mathbf{y}_k \mid \mathbf{x}_k) = \frac{1}{2\pi^{M/2}\sqrt{\det(\mathbf{D}_n)}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}\mathbf{x}_k)^T \mathbf{D}_n^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}\mathbf{x}_k)\right\} \tag{78}$$

Подставим (75),(76) и (78) в уравнение (77):

$$\begin{gathered}\widehat{p}\left(\mathbf{x}_\nu \middle| \mathbf{Y}_{\nu+1}^{k}\right) = C_k \cdot \int_{\mathbf{x}_\kappa} \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}\mathbf{x}_k)^T \mathbf{D}_n^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}\mathbf{x}_k)\right\} \cdot \\ \cdot \exp\left\{\frac{1}{2} \cdot \left[(\mathbf{F}^T \mathbf{D}_\xi^{-1} \mathbf{x}_k + \mathbf{M}_k)^T \cdot \mathbf{D}_{\nu+i}^{-1} \cdot (\mathbf{F}^T \mathbf{D}_\xi^{-1} \mathbf{x}_k + \mathbf{M}_k)\right]\right\} \cdot \\ \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot \left[\mathbf{x}_k^T \mathbf{D}_\xi^{-1} \mathbf{x}_k + \mathbf{S}_k + \mathbf{R}_k\right]\right\} d\mathbf{x}_\kappa;\end{gathered} \tag{79}$$

Раскроем скобки в уравнении (79):

$$\begin{gathered}(\mathbf{y}_k - \mathbf{H}\mathbf{x}_k)^T \mathbf{D}_n^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}\mathbf{x}_k) = \\ = (\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_n^{-1} - (\mathbf{H}\mathbf{x}_k)^T \mathbf{D}_n^{-1})(\mathbf{y}_k - \mathbf{H}\mathbf{x}_k) = \\ = \mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{y}_k - \mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{H}\mathbf{x}_k - (\mathbf{H}\mathbf{x}_k)^T \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{y}_k + (\mathbf{H}\mathbf{x}_k)^T \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{H}\mathbf{x}_k;\end{gathered} \tag{80}$$

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_k+\mathbf{M}_k)^T\cdot\mathbf{D}_k^{-1}\cdot(\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_k+\mathbf{M}_k)=\\
&=(\mathbf{x}_k{}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}+\mathbf{M}_k^T\mathbf{D}_k^{-1})\cdot(\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_k+\mathbf{M}_k)=\\
&=\mathbf{x}_k{}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_k+\mathbf{x}_k{}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k+\\
&+\mathbf{M}_k^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_k+\mathbf{M}_k^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k;
\end{aligned}
\tag{81}
$$

Все слагаемые в формулах (80)-(81) содержащие $\mathbf{x}_k$ и не содержащие $\mathbf{x}_k^T$:

$$
-\mathbf{y}_k^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H}\mathbf{x}_k+\mathbf{M}_k^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_k; \tag{82}
$$

Все слагаемые в формулах (80)-(81) не содержащие $\mathbf{x}_k$ и содержащие $\mathbf{x}_k^T$:

$$
-(\mathbf{H}\mathbf{x}_k)^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k+\mathbf{x}_k{}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k; \tag{83}
$$

Все слагаемые в формулах (80)-(81) содержащие $\mathbf{x}_k$ и содержащие $\mathbf{x}_k^T$:

$$
(\mathbf{H}\mathbf{x}_k)^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H}\mathbf{x}_k+\mathbf{x}_k{}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_k+\mathbf{x}_k^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_k; \tag{84}
$$

Все слагаемые в формулах (80)-(81) не содержащие $\mathbf{x}_k$ и не содержащие $\mathbf{x}_k^T$:

$$
\mathbf{y}_k^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k+\mathbf{M}_k^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k+\mathbf{S}_k+\mathbf{R}_k; \tag{85}
$$

Подставим уравнения (82)-(85) в уравнение (79):

$$
\begin{aligned}
p(\mathbf{x}_\nu\,|\,\mathbf{Y}_{\nu+1}^k)=C_k\cdot\int\limits_{\mathbf{x}_\kappa}\exp\{&-\mathbf{x}_k^T\frac{1}{2}[\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H}-\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}+\mathbf{D}_\xi^{-1}]\mathbf{x}_k+\\
&+[\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k+\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k]^T\mathbf{x}_k-\\
&-\frac{1}{2}[\mathbf{y}_k^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k-\mathbf{M}_k^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k+\mathbf{S}_k+\mathbf{R}_k]\}d\mathbf{x}_k;
\end{aligned}
\tag{86}
$$

Далее воспользуемся формулой (52). Выразим слагаемые под экспонентой из левой части формулы (52)в соответствии с формулой (86):

$$
\begin{aligned}
&-\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}=-\mathbf{x}_k^T\frac{1}{2}[\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H}-\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}+\mathbf{D}_\xi^{-1}]\mathbf{x}_k;\\
&\mathbf{b}^T\mathbf{x}=[\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k+\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k]^T\mathbf{x}_k;\\
&\mathbf{c}=-\frac{1}{2}[\mathbf{y}_k^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k-\mathbf{M}_k^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k+\mathbf{S}_k+\mathbf{R}_k];
\end{aligned}
\tag{87}
$$

Воспользуемся левой частью формулы (52)и подставим в уравнение (86):

$$p(\mathbf{x}_\nu \mid \mathbf{Y}_{\nu+1}^k) = C_6 \cdot \exp\{\frac{1}{2}[(\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k + \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k)^T \cdot$$
$$\cdot(\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H} - \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1} + \mathbf{D}_\xi^{-1})^{-1} \cdot (\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k + \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k) -$$
$$-(\mathbf{y}_k^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k - \mathbf{M}_k^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k + \mathbf{S}_k + \mathbf{R}_k)]\}; \qquad (88)$$

Где: $C_6 = C_k \cdot \det(\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H} - \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1} + \mathbf{D}_\xi^{-1})^{-\frac{1}{2}};$

Получим выражение для ненормированной плотности вероятности $\widehat{p}\left(\mathbf{x}_\nu \middle| \mathbf{Y}_{\nu+1}^k\right)$с учетом Гауссова распределения, обусловленного шумом наблюдений:

$$\widehat{p}\left(\mathbf{x}_\nu \middle| \mathbf{Y}_{\nu+1}^k\right) = C_6 \cdot \exp\{\frac{1}{2}[(\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k + \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k)^T \cdot$$
$$\cdot(\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H} - \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1} + \mathbf{D}_\xi^{-1})^{-1} \cdot (\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k + \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k) -$$
$$-(\mathbf{y}_k^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k - \mathbf{M}_k^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k + \mathbf{S}_k + \mathbf{R}_k)]\}; \qquad (89)$$
$$C_6 = C_k \cdot \det(\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H} - \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1} + \mathbf{D}_\xi^{-1})^{-\frac{1}{2}};$$

Составляющие ПВ $\mathbf{D}_{\nu+i}, \mathbf{M}_{\nu+i}, \mathbf{S}_{\nu+i}, \mathbf{R}_{\nu+i}$ находится итеративно как:

при $i = 2;$	при $i = [3, k-\nu];$	
$\mathbf{D}_{\nu+2} = \mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H} + \mathbf{D}_\xi^{-1} + \mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F};$ $\mathbf{M}_{\nu+2} = \mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+1} + \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_\nu;$ $\mathbf{S}_{\nu+2} = \mathbf{y}_{\nu+1}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+1};$ $\mathbf{R}_{\nu+2} = (\mathbf{F}\mathbf{x}_\nu)^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_\nu;$	$\mathbf{D}_{\nu+i} = \mathbf{D}_{\nu+2} - \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+i-1})^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1};$ $\mathbf{M}_{\nu+i} = \mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+i-1} + \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+i-1})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+i-1};$ $\mathbf{S}_{\nu+i} = \mathbf{S}_{\nu+i} + \mathbf{y}_{\nu+i-1}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+i-1};$ $\mathbf{R}_{\nu+i} = \mathbf{R}_{\nu+i} - \mathbf{M}_{\nu+i-1}{}^T(\mathbf{D}_{\nu+i-1})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+i-1};$	(90)

Приложение 7

Нахождение итогового алгоритма оценки $\mathbf{x}_{\mathrm{int},\nu}$

Интерполяционная оценка $\mathbf{x}_{\mathrm{int},\nu}$ и ее дисперсия $\mathbf{D}_{\mathrm{int},\nu}$.

Представим АПВ $p(\mathbf{x}_\nu \mid \mathbf{Y}_0^k)$ с учетом Гауссова распределения шума наблюдений:

$$p(\mathbf{x}_\nu \mid \mathbf{Y}_0^k) = \frac{1}{2\pi^{M/2}\sqrt{\det(\mathbf{D}_{\mathrm{int},\nu})}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_{\mathrm{int},\nu})^T \mathbf{D}_{\mathrm{int},\nu}^{-1}(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_{\mathrm{int},\nu})\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi^{M/2}\sqrt{\det(\mathbf{D}_{\mathrm{int},\nu})}}\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\left[\mathbf{x}_\nu^T\mathbf{D}_{\mathrm{int},\nu}^{-1}\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_\nu^T\mathbf{D}_{\mathrm{int},\nu}^{-1}\mathbf{x}_{\mathrm{int},\nu} - \overset{T}{\mathbf{x}}_{\mathrm{int},\nu}\mathbf{D}_{\mathrm{int},\nu}^{-1}\mathbf{x}_\nu + \overset{T}{\mathbf{x}}_{\mathrm{int},\nu}\mathbf{D}_{\mathrm{int},\nu}^{-1}\mathbf{x}_{\mathrm{int},\nu}\right]\right\} = \tag{91}$$

$$= \frac{1}{2\pi^{M/2}\sqrt{\det(\mathbf{D}_{\mathrm{int},\nu})}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\left[\mathbf{x}_\nu^T\mathbf{D}_{\mathrm{int},\nu}^{-1}\mathbf{x}_\nu - 2\widehat{\overset{T}{\mathbf{x}}_{\mathrm{int},\nu}}\mathbf{D}_{\mathrm{int},\nu}^{-1}\mathbf{x}_\nu + \widehat{\overset{T}{\mathbf{x}}_{\mathrm{int},\nu}}\mathbf{D}_{\mathrm{int},\nu}^{-1}\widehat{\mathbf{x}_{\mathrm{int},\nu}}\right]\right\};$$

Где: $\mathbf{x}_{\mathrm{int},\nu}$ - интерполяционной оценка, $\mathbf{D}_{\mathrm{int},\nu}$ - дисперсия интерполяционной оценки.

Пусть:

$$\mathbf{P} = \mathbf{D}_{\mathrm{int},\nu}^{-1};$$

$$\mathbf{q}^T = \mathbf{x}_{\mathrm{int},\nu}\mathbf{D}_{\mathrm{int},\nu}^{-1}; \tag{92}$$

$$c = \overset{T}{\mathbf{x}}_{\mathrm{int},\nu}\mathbf{D}_{\mathrm{int},\nu}^{-1}\mathbf{x}_{\mathrm{int},\nu} + \ln\left(\frac{1}{2\pi^{M/2}\sqrt{\det(\mathbf{D}_{\mathrm{int},\nu})}}\right);$$

Алгоритм для нахождения АПВ $p\left(\boldsymbol{x}_\nu \middle| \boldsymbol{Y}_1^k\right)$:

$$\boxed{p\left(\mathbf{x}_\nu \middle| \mathbf{Y}_0^k\right) = c_1\cdot\widehat{p}\left(\mathbf{x}_\nu \middle| \mathbf{Y}_0^\nu\right)\cdot\widehat{p}\left(\mathbf{x}_\nu \middle| \mathbf{Y}_{\nu+1}^k\right)} \tag{93}$$

Тогда согласно уравнениям (91)-(93):

$$p(\mathbf{x}_\nu \mid \mathbf{Y}_0^k) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\mathbf{x}_\nu^T\mathbf{P}\mathbf{x}_\nu + \mathbf{q}^T\mathbf{x}_\nu + c\right\} = c_1 \cdot \widehat{p}\left(\mathbf{x}_\nu \middle| \mathbf{Y}_0^\nu\right)\cdot \widehat{p}\left(\mathbf{x}_\nu \middle| \mathbf{Y}_{\nu+1}^k\right); \tag{94}$$

Подставим уравнение (89)-(90) в уравнение (94):

$$\begin{gathered} p(\mathbf{x}_\nu \mid \mathbf{Y}_0^k) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\mathbf{x}_\nu^T\mathbf{P}\mathbf{x}_\nu + \mathbf{q}^T\mathbf{x}_\nu + c\right\} = C_7 \cdot \widehat{p}\left(\mathbf{x}_\nu \middle| \mathbf{Y}_0^\nu\right)\cdot \\ \cdot\exp\{\frac{1}{2}[(\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k + \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k)^T \cdot \\ \cdot(\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H} - \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1} + \mathbf{D}_\xi^{-1})^{-1}\cdot(\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k + \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k) - \\ -(\mathbf{y}_k^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k - \mathbf{M}_k^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k + \mathbf{S}_k + \mathbf{R}_k)]\}; \end{gathered} \tag{95}$$

Запишем выражения для ПВ $\widehat{p}\left(\mathbf{x}_\nu \middle| \mathbf{Y}_1^\nu\right)$ с учётом гауссовости шума наблюдений и формирующего шума:

$$\begin{gathered} p(\mathbf{x}_\nu \mid \mathbf{Y}_1^\nu) = \frac{1}{2\pi^{M/2}\sqrt{\det(\mathbf{D}_{flt,\nu})}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_{flt,\nu})^T\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_{flt,\nu})\right\} = \\ = \frac{1}{2\pi^{M/2}\sqrt{\det(\mathbf{D}_{flt,\nu})}}\cdot \\ \cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\left[\mathbf{x}_\nu^T\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_\nu^T\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}\mathbf{x}_{flt,\nu} - \overset{T}{\mathbf{x}}_{flt,\nu}\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}\mathbf{x}_\nu + \overset{T}{\mathbf{x}}_{flt,\nu}\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}\mathbf{x}_{flt,\nu}\right]\right\} = \\ = \frac{1}{2\pi^{M/2}\sqrt{\det(\mathbf{D}_{flt,\nu})}}\cdot \\ \cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\left[\mathbf{x}_\nu^T\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}\mathbf{x}_\nu - 2\widehat{\mathbf{x}}^T_{flt,\nu}\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}\mathbf{x}_\nu + \widehat{\mathbf{x}}^T_{flt,\nu}\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}\widehat{\mathbf{x}}_{flt,\nu}\right]\right\}; \end{gathered} \tag{96}$$

Где: $\mathbf{x}_{flt,\nu}$ - фильтрационная оценка, $\mathbf{D}_{flt,\nu}$ - дисперсия фильтрационной оценки.

Найдем $\mathbf{P}$, $\mathbf{q}^T$.

$$p(\mathbf{x}_\nu \mid \mathbf{Y}_0^k) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot \mathbf{x}_\nu^T \mathbf{P} \mathbf{x}_\nu + \mathbf{q}^T \mathbf{x}_\nu + c\right\} = c_1 \cdot \iint p(\mathbf{X}_0^k \mid \mathbf{Y}_0^k) d\mathbf{X}_0^{\nu-1} d\mathbf{X}_{\nu+1}^k =$$
$$= C_7 \cdot p(\mathbf{x}_\nu \mid \mathbf{Y}_0^\nu)\cdot$$
$$\cdot \exp\{\frac{1}{2}[(\mathbf{H}^T \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{y}_k + \mathbf{D}_\xi^{-1} \mathbf{F} \mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{M}_k)^T \cdot \tag{97}$$
$$\cdot (\mathbf{H}^T \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{H} - \mathbf{D}_\xi^{-1} \mathbf{F} \mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{D}_\xi^{-1} + \mathbf{D}_\xi^{-1})^{-1} \cdot (\mathbf{H}^T \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{y}_k + \mathbf{D}_\xi^{-1} \mathbf{F} \mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{M}_k) -$$
$$-(\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{y}_k - \mathbf{M}_k^T \mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{M}_k + \mathbf{S}_k + \mathbf{R}_k)]\};$$

Где:

при $i = 2$;	при $i = [3, k-\nu]$;
$\mathbf{D}_{\nu+2} = \mathbf{H}^T \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{H} + \mathbf{D}_\xi^{-1} + \mathbf{F}^T \mathbf{D}_\xi^{-1} \mathbf{F}$; $\mathbf{M}_{\nu+2} = \mathbf{H}^T \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{y}_{\nu+1} + \mathbf{D}_\xi^{-1} \mathbf{F} \mathbf{x}_\nu$; $\mathbf{S}_{\nu+2} = \mathbf{y}_{\nu+1}^T \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{y}_{\nu+1}$; $\mathbf{R}_{\nu+2} = (\mathbf{F}\mathbf{x}_\nu)^T \mathbf{D}_\xi^{-1} \mathbf{F} \mathbf{x}_\nu$;	$\mathbf{D}_{\nu+i} = \mathbf{D}_{\nu+2} - \mathbf{D}_\xi^{-1} \mathbf{F} (\mathbf{D}_{\nu+i-1})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{D}_\xi^{-1}$; $\mathbf{M}_{\nu+i} = \mathbf{H}^T \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{y}_{\nu+i-1} + \mathbf{D}_\xi^{-1} \mathbf{F} (\mathbf{D}_{\nu+i-1})^{-1} \mathbf{M}_{\nu+i-1}$; $\mathbf{S}_{\nu+i} = \mathbf{S}_{\nu+i} + \mathbf{y}_{\nu+i-1}^T \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{y}_{\nu+i-1}$; $\mathbf{R}_{\nu+i} = \mathbf{R}_{\nu+i} - \mathbf{M}_{\nu+i-1}{}^T (\mathbf{D}_{\nu+i-1})^{-1} \mathbf{M}_{\nu+i-1}$;

Представим $\widehat{p}\left(\mathbf{x}_\nu \middle| \mathbf{Y}_1^\nu\right)$ (уравнение (96)):

$$p(\mathbf{x}_\nu \mid \mathbf{Y}_0^k) = C_8 \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\left[\mathbf{x}_\nu^T \mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1} \mathbf{x}_\nu - 2\mathbf{x}_{flt,\nu}^T \mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1} \mathbf{x}_\nu + \mathbf{x}_{flt,\nu}^T \mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1} \mathbf{x}_{flt,\nu}\right]\right\}\cdot$$
$$\cdot \exp\{\frac{1}{2}[(\mathbf{H}^T \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{y}_k + \mathbf{D}_\xi^{-1} \mathbf{F} \mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{M}_k)^T \cdot \tag{98}$$
$$\cdot (\mathbf{H}^T \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{H} - \mathbf{D}_\xi^{-1} \mathbf{F} \mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{D}_\xi^{-1} + \mathbf{D}_\xi^{-1})^{-1} \cdot (\mathbf{H}^T \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{y}_k + \mathbf{D}_\xi^{-1} \mathbf{F} \mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{M}_k) -$$
$$-(\mathbf{y}_k^T \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{y}_k - \mathbf{M}_k^T \mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{M}_k + \mathbf{S}_k + \mathbf{R}_k)]\};$$

Видно, что $\mathbf{x}_\nu$ содержится в $\mathbf{R}_{\nu+i}$ и в $\mathbf{M}_{\nu+i}$,

Запишем $\mathbf{M}_{\nu+i}$ следующим образом:

$$\mathbf{M}_{\nu+i} = \mathbf{M}_{\nu+i}^1 \mathbf{x}_\nu + \mathbf{M}_{\nu+i}^2;$$

при $i = 2$;	при $i = [3, k-\nu]$;
$\mathbf{M}_{\nu+2}^1 = \mathbf{D}_\xi^{-1} \mathbf{F}$; $\mathbf{M}_{\nu+2}^2 = \mathbf{H}^T \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{y}_{\nu+1}$;	$\mathbf{M}_{\nu+i}^1 = \mathbf{D}_\xi^{-1} \mathbf{F} (\mathbf{D}_{\nu+i})^{-1} \mathbf{M}_{\nu+i-1}^1$; $\mathbf{M}_{\nu+i}^2 = \mathbf{H}^T \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{y}_{\nu+i-1} + \mathbf{D}_\xi^{-1} \mathbf{F} (\mathbf{D}_{\nu+i-1})^{-1} \mathbf{M}_{\nu+i-1}^2$;

(99)

Запишем $R_{\nu+i}$ следующим образом:

$$\mathbf{R}_{\nu+i} = (\mathbf{F}\mathbf{x}_\nu)^T \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_\nu - \sum_{j=3}^{i}(\mathbf{M}_{\nu+j-1}{}^T(\mathbf{D}_{\nu+j-1})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+j-1}) =$$

$$= (\mathbf{F}\mathbf{x}_\nu)^T \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_\nu - \sum_{j=3}^{i}((\mathbf{M}^1_{\nu+j-1}\mathbf{x}_\nu + \mathbf{M}^2_{\nu+j-1})^T(\mathbf{D}_{\nu+j-1})^{-1}(\mathbf{M}^1_{\nu+j-1}\mathbf{x}_\nu + \mathbf{M}^2_{\nu+j-1})) =$$

$$= \mathbf{x}_\nu^T\left[\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F} - \sum_{j=3}^{i}\mathbf{M}^{1T}_{\nu+j-1}(\mathbf{D}_{\nu+j-1})^{-1}\mathbf{M}^1_{\nu+j-1}\right]\mathbf{x}_\nu -$$

$$-2\left[\sum_{j=3}^{i}(\mathbf{M}^{1T}_{\nu+j-1}(\mathbf{D}_{\nu+j-1})^{-1}\mathbf{M}^2_{\nu+j-1})^T\right]\mathbf{x}_\nu -$$

$$-\sum_{j=3}^{i}\mathbf{M}^{2T}_{\nu+j-1}(\mathbf{D}_{\nu+j-1})^{-1}\mathbf{M}^2_{\nu+j-1}$$

$$= \mathbf{x}_\nu^T\mathbf{R}^1_{\nu+i}\mathbf{x}_\nu - 2\mathbf{R}^{2T}_{\nu+i}\mathbf{x}_\nu - \mathbf{R}^3_{\nu+i}; \qquad (100)$$

$$\mathbf{R}^1_{\nu+i} = \left[\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F} - \sum_{j=3}^{i}\mathbf{M}^{1T}_{\nu+j-1}(\mathbf{D}_{\nu+j-1})^{-1}\mathbf{M}^1_{\nu+j-1}\right];$$

$$\mathbf{R}^2_{\nu+i} = \sum_{j=3}^{i}\mathbf{M}^{1T}_{\nu+j-1}(\mathbf{D}_{\nu+j-1})^{-1}\mathbf{M}^2_{\nu+j-1};$$

$$\mathbf{R}^3_{\nu+i} = \sum_{j=3}^{i}\mathbf{M}^{2T}_{\nu+j-1}(\mathbf{D}_{\nu+j-1})^{-1}\mathbf{M}^2_{\nu+j-1};$$

при $i = 2$;	при $i = [3, k-\nu]$;
$\mathbf{R}^1_{\nu+i} = \mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}$; $\mathbf{R}^2_{\nu+i} = 0$; $\mathbf{R}^3_{\nu+i} = 0$;	$\mathbf{R}^1_{\nu+i} = \mathbf{R}^1_{\nu+i-1} - \mathbf{M}^{1T}_{\nu+i-1}(\mathbf{D}_{\nu+i-1})^{-1}\mathbf{M}^1_{\nu+i-1}$; $\mathbf{R}^2_{\nu+i} = \mathbf{R}^2_{\nu+i-1} + \mathbf{M}^{1T}_{\nu+i-1}(\mathbf{D}_{\nu+i-1})^{-1}\mathbf{M}^2_{\nu+i-1}$; $\mathbf{R}^3_{\nu+i} = \mathbf{R}^3_{\nu+i-1} + \mathbf{M}^{2T}_{\nu+j-1}(\mathbf{D}_{\nu+j-1})^{-1}\mathbf{M}^2_{\nu+j-1}$;

Теперь выразим явно $\mathbf{x}_\nu$ под экспонентой:

$$(\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k + \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_k)^{-1}\mathbf{M}_k)^T =$$

$$= (\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k + \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_k)^{-1}\mathbf{M}^2_k + \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_k)^{-1}\mathbf{M}^1_k\mathbf{x}_\nu)^T = \qquad (101)$$

$$= (\mathbf{U} + \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_k)^{-1}\mathbf{M}^1_k\mathbf{x}_\nu)^T;$$

$$
\begin{gathered}
(\mathbf{U}+\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_k)^{-1}\mathbf{M}_k^1\mathbf{x}_\nu)^T(\mathbf{W})^{-1}(\mathbf{U}+\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_k)^{-1}\mathbf{M}_k^1\mathbf{x}_\nu)= \\
=\mathbf{U}^T(\mathbf{W})^{-1}\mathbf{U}+\mathbf{U}^T(\mathbf{W})^{-1}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_k)^{-1}\mathbf{M}_k^1\mathbf{x}_\nu+ \\
+\mathbf{x}_\nu^T\mathbf{M}_k^{1T}((\mathbf{D}_k)^{-1})^T\mathbf{F}^T\mathbf{D}_{\xi}^{-1}(\mathbf{W})^{-1}\mathbf{U}+ \\
+\mathbf{x}_\nu^T\mathbf{M}_k^{1T}((\mathbf{D}_k)^{-1})^T\mathbf{F}^T\mathbf{D}_{\xi}^{-1}(\mathbf{W})^{-1}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_k)^{-1}\mathbf{M}_k^1\mathbf{x}_\nu;
\end{gathered}
\tag{102}
$$

$$
\begin{gathered}
(\mathbf{y}_k^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k-\mathbf{M}_k^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k+\mathbf{S}_k+\mathbf{R}_k)= \\
=(\mathbf{y}_k^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k-(\mathbf{M}_k^1\mathbf{x}_\nu+\mathbf{M}_k^2)^T\mathbf{D}_k^{-1}(\mathbf{M}_k^1\mathbf{x}_\nu+\mathbf{M}_k^2)+ \\
+\mathbf{S}_k+\mathbf{x}_\nu^T\mathbf{R}_{\nu+i}^1\mathbf{x}_\nu-2\mathbf{R}_{\nu+i}^{2T}\mathbf{x}_\nu-\mathbf{R}_{\nu+i}^3)= \\
=(\mathbf{y}_k^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k-(\mathbf{M}_k^1\mathbf{x}_\nu)^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k^1\mathbf{x}_\nu-(\mathbf{M}_k^1\mathbf{x}_\nu)^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k^2-\mathbf{M}_k^{2T}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k^1\mathbf{x}_\nu- \\
-\mathbf{M}_k^{2T}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k^2+\mathbf{S}_k+\mathbf{x}_\nu^T\mathbf{R}_{\nu+i}^1\mathbf{x}_\nu-2\mathbf{R}_{\nu+i}^{2T}\mathbf{x}_\nu-\mathbf{R}_{\nu+i}^3)= \\
=(\mathbf{Z}-\mathbf{x}_\nu^T\mathbf{M}_k^{1T}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k^1\mathbf{x}_\nu-(\mathbf{x}_\nu\mathbf{M}_k^1)^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k^2- \\
-\mathbf{M}_k^{2T}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k^1\mathbf{x}_\nu+\mathbf{x}_\nu^T\mathbf{R}_k^1\mathbf{x}_\nu-2\mathbf{R}_k^{2T}\mathbf{x}_\nu);
\end{gathered}
\tag{103}
$$

$$
\mathbf{W}=\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H}-\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_{\xi}^{-1}+\mathbf{D}_{\xi}^{-1}; \tag{104}
$$

Подставим все это в (97) и приведем к виду слева:

$$
\begin{gathered}
\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\mathbf{x}_\nu^T\mathbf{P}\mathbf{x}_\nu+\mathbf{q}^T\mathbf{x}_\nu+c\right\}= \\
=C_8\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\left[\mathbf{x}_\nu^T\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}\mathbf{x}_\nu-2\mathbf{x}_{flt,\nu}^T\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}\mathbf{x}_\nu+\mathbf{x}_{flt,\nu}^T\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}\mathbf{x}_{flt,\nu}\right]\right\}\cdot \\
\cdot\exp\{\frac{1}{2}[\mathbf{U}^T(\mathbf{W})^{-1}\mathbf{U}+\mathbf{U}^T(\mathbf{W})^{-1}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_k)^{-1}\mathbf{M}_k^1\mathbf{x}_\nu+ \\
+\mathbf{x}_\nu^T\mathbf{M}_k^{1T}((\mathbf{D}_k)^{-1})^T\mathbf{F}^T\mathbf{D}_{\xi}^{-1}(\mathbf{W})^{-1}\mathbf{U}+ \\
+\mathbf{x}_\nu^T\mathbf{M}_k^{1T}((\mathbf{D}_k)^{-1})^T\mathbf{F}^T\mathbf{D}_{\xi}^{-1}(\mathbf{W})^{-1}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_k)^{-1}\mathbf{M}_k^1\mathbf{x}_\nu- \\
-\mathbf{Z}+\mathbf{x}_\nu^T\mathbf{M}_k^{1T}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k^1\mathbf{x}_\nu+(\mathbf{M}_k^1\mathbf{x}_\nu)^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k^2+ \\
+\mathbf{M}_k^{2T}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k^1\mathbf{x}_\nu-\mathbf{x}_\nu^T\mathbf{R}_k^1\mathbf{x}_\nu+2\mathbf{R}_k^{2T}\mathbf{x}_\nu)]\};
\end{gathered}
\tag{105}
$$

$$=$$

$$\exp\{-\frac{1}{2}\cdot\mathbf{x}_\nu^T(\mathbf{R}_k^1+\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}-\mathbf{M}_k^{1T}((\mathbf{D}_k)^{-1})^T\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}(\mathbf{W})^{-1}\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_k)^{-1}\mathbf{M}_k^1-$$

$$-\mathbf{M}_k^{1T}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k^1)\mathbf{x}_\nu+$$

$$+((\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1})^T\mathbf{x}_{flt,\nu}+\mathbf{M}_k^{1T}((\mathbf{D}_k)^{-1})^T\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}(\mathbf{W})^{-1}\mathbf{U}+\mathbf{R}_k^2+\mathbf{M}_k^{1T}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k^2)^T\mathbf{x}_\nu$$

$$+\frac{1}{2}(\mathbf{U}^T(\mathbf{W})^{-1}\mathbf{U}-\mathbf{x}^T_{flt,\nu}\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}\mathbf{x}_{flt,\nu}-\mathbf{Z})+\ln(C_8)\};$$

Тогда:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}&=\mathbf{R}_k^1+\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}-\mathbf{M}_k^{1T}((\mathbf{D}_k)^{-1})^T\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}(\mathbf{W})^{-1}\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_k)^{-1}\mathbf{M}_k^1-\mathbf{M}_k^{1T}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k^1;\\ \mathbf{q}^T&=((\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1})^T\mathbf{x}_{flt,\nu}+\mathbf{M}_k^{1T}((\mathbf{D}_k)^{-1})^T\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}(\mathbf{W})^{-1}\mathbf{U}+\mathbf{R}_k^2+\mathbf{M}_k^{1T}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k^2)^T;\\ c&=\frac{1}{2}(\mathbf{U}^T(\mathbf{W})^{-1}\mathbf{U}-\mathbf{x}^T_{flt,\nu}\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}\mathbf{x}_{flt,\nu}-\mathbf{Z})+\ln(C_8);\end{aligned}\tag{106}$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\mathbf{x}_\nu^T\mathbf{P}\mathbf{x}_\nu+\mathbf{q}^T\mathbf{x}_\nu+c\right\}$$

$$=$$

$$\begin{gathered}\exp\{-\frac{1}{2}\cdot\mathbf{x}_\nu^T(\mathbf{R}_k^1+\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}-\mathbf{M}_k^{1T}((\mathbf{D}_k)^{-1})^T\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}(\mathbf{W})^{-1}\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_k)^{-1}\mathbf{M}_k^1-\\ -\mathbf{M}_k^{1T}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k^1)\mathbf{x}_\nu+\\ +((\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1})^T\mathbf{x}_{flt,\nu}+\mathbf{M}_k^{1T}((\mathbf{D}_k)^{-1})^T\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}(\mathbf{W})^{-1}\mathbf{U}+\mathbf{R}_k^2+\mathbf{M}_k^{1T}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k^2)^T\mathbf{x}_\nu\\ +\frac{1}{2}(\mathbf{U}^T(\mathbf{W})^{-1}\mathbf{U}-\mathbf{x}^T_{flt,\nu}\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}\widehat{\mathbf{x}_{flt,\nu}}-Z)+\ln(C_8)\};\end{gathered}\tag{107}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}&=\mathbf{R}_k^1+\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}-\mathbf{M}_k^{1T}((\mathbf{D}_k)^{-1})^T\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}(\mathbf{W})^{-1}\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_k)^{-1}\mathbf{M}_k^1-\mathbf{M}_k^{1T}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k^1;\\ \mathbf{q}^T&=((\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1})^T\mathbf{x}_{flt,\nu}+\mathbf{M}_k^{1T}((\mathbf{D}_k)^{-1})^T\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}(\mathbf{W})^{-1}\mathbf{U}+\mathbf{R}_k^2+\mathbf{M}_k^{1T}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k^2)^T;\\ c&=\frac{1}{2}(\mathbf{U}^T(\mathbf{W})^{-1}\mathbf{U}-\mathbf{x}^T_{flt,\nu}\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}\mathbf{x}_{flt,\nu}-Z)+\ln(C_8);\end{aligned}\tag{108}$$

Оптимизируем, с точки зрения количества матричных обращений и получим:

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}_k^1 + \mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1} - \mathbf{M}_k^{1T}(\mathbf{D}_k)^T \mathbf{F}^T \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{W}\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k\mathbf{M}_k^1 - \mathbf{M}_k^{1T}\mathbf{D}_k\mathbf{M}_k^1;$$

$$\mathbf{q}^T = ((\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1})^T \mathbf{x}_{flt,\nu} + \mathbf{M}_k^{1T}(\mathbf{D}_k)^T \mathbf{F}^T \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{W}\mathbf{U} + \mathbf{R}_k^2 + \mathbf{M}_k^{1T}\mathbf{D}_k\mathbf{M}_k^2)^T;$$

$$c = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^T\mathbf{W}\mathbf{U} - \overset{T}{\mathbf{x}}_{flt,\nu}\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}\mathbf{x}_{flt,\nu} - Z) + \ln(C_8);$$

Где: (109)

$$\mathbf{U} = \mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k + \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k\mathbf{M}_k^2;$$

$$\mathbf{W} = (\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H} - \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1} + \mathbf{D}_\xi^{-1})^{-1};$$

Составляющие $\mathbf{D}_k$, $\mathbf{M}_k^1$, $\mathbf{M}_k^2$ находятся итеративно:

при $i = 2$;	при $i = [3, k-\nu]$;
$\mathbf{D}_{\nu+2} = (\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H} + \mathbf{D}_\xi^{-1} + \mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F})^{-1};$ $\mathbf{M}_{\nu+2}^1 = \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F};$ $\mathbf{M}_{\nu+2}^2 = \mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+i-1};$ $\mathbf{R}_{\nu+2}^1 = \mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F};$ $\mathbf{R}_{\nu+2}^2 = 0;$	$\mathbf{D}_{\nu+i} = (\mathbf{D}_{\nu+2} - \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_{\nu+i-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1})^{-1};$ $\mathbf{M}_{\nu+i}^1 = \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_{\nu+i}\mathbf{M}_{\nu+i-1}^1;$ $\mathbf{M}_{\nu+i}^2 = \mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+i-1} + \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_{\nu+i-1}\mathbf{M}_{\nu+i-1}^2;$ $\mathbf{R}_{\nu+i}^1 = \mathbf{R}_{\nu+i-1}^1 - \mathbf{M}_{\nu+j-1}^{1T}\mathbf{D}_{\nu+i-1}\mathbf{M}_{\nu+j-1}^1;$ $\mathbf{R}_{\nu+i}^2 = \mathbf{R}_{\nu+i-1}^2 + \mathbf{M}_{\nu+j-1}^{1T}\mathbf{D}_{\nu+i-1}\mathbf{M}_{\nu+j-1}^2;$

(110)

Теперь перейдем к нахождению интерполяционной оценки $\mathbf{x}_{\text{int},\nu}$ и дисперсии интерполяционной оценки $\mathbf{D}_{\text{int},\nu}$.

Т.к. $\mathbf{P} = \mathbf{D}_{\text{int},\nu}^{-1}$, следовательно: $\mathbf{D}_{\text{int},\nu} = \mathbf{P}^{-1}$:

Т.к. $\mathbf{q}^T = \overset{T}{\mathbf{x}}_{\text{int},\nu}\mathbf{D}_{\text{int},\nu}^{-1}$, следовательно: $\mathbf{x}_{\text{int},\nu} = \mathbf{P}^{-1}\cdot\mathbf{q}$;

Пусть:

$$\mathbf{D}_n^{inv} = \mathbf{D}_n^{-1};$$
$$\mathbf{D}_\xi^{inv} = \mathbf{D}_\xi^{-1}; \quad (111)$$

Тогда итоговый алгоритм нахождения оценки $\mathbf{x}_{\text{int},\nu}$:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{\text{int},\nu} = \boldsymbol{P}^{-1} \cdot \boldsymbol{q};$$

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{R}_k^1 + \boldsymbol{D}_{flt,\nu}^{-1} - \boldsymbol{M}_k^{1T} \boldsymbol{D}_k \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{D}_\xi^{inv} \boldsymbol{W} \boldsymbol{D}_\xi^{inv} \boldsymbol{F} \boldsymbol{D}_k \boldsymbol{M}_k^1 - \boldsymbol{M}_k^{1T} \boldsymbol{D}_k \boldsymbol{M}_k^1;$$

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{D}_{flt,\nu}^{-1} \hat{\boldsymbol{x}}_{flt,\nu} + \boldsymbol{M}_k^{1T} \boldsymbol{D}_k \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{D}_\xi^{inv} \boldsymbol{W} \boldsymbol{U} + \boldsymbol{R}_k^2 + \boldsymbol{M}_k^{1T} \boldsymbol{D}_k \boldsymbol{M}_k^2;$$

Где:

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{H}^T \boldsymbol{D}_n^{inv} \boldsymbol{y}_k + \boldsymbol{D}_\xi^{inv} \boldsymbol{F} \boldsymbol{D}_k \boldsymbol{M}_k^2;$$

$$\boldsymbol{W} = (\boldsymbol{H}^T \boldsymbol{D}_n^{inv} \boldsymbol{H} - \boldsymbol{D}_\xi^{inv} \boldsymbol{F} \boldsymbol{D}_k \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{D}_\xi^{inv} + \boldsymbol{D}_\xi^{inv})^{-1};$$

Оценки, получаемые от фильтра Калмана:

Этап экстраполяции:

$$\overline{\boldsymbol{D}}_{flt,\nu} = \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{D}_{flt,\nu-1}^{-1} \boldsymbol{F} + \boldsymbol{D}_\xi;$$

$$\overline{\boldsymbol{x}}_{flt,\nu} = \boldsymbol{F} \hat{\boldsymbol{x}}_{flt,\nu-1};$$

Этап коррекции:

$$\boldsymbol{D}_{flt,\nu} = \overline{\boldsymbol{D}}_{flt,\nu}^{-1} + \boldsymbol{H}^T \boldsymbol{D}_n^{inv} \boldsymbol{H};$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{flt,\nu} = \overline{\boldsymbol{x}}_{flt,\nu} + \boldsymbol{D}_{flt,\nu} \boldsymbol{H}^T \boldsymbol{D}_n^{inv} y_\nu;$$

(112)

Составляющие $\boldsymbol{D}_k$, $\boldsymbol{M}_k^1$, $\boldsymbol{M}_k^2$, $\boldsymbol{R}_k^1$ и $\boldsymbol{R}_k^2$ находятся итеративно:

при $i = 2;$	при $i = [3, k - \nu];$
$\mathbf{D}_{\nu+2} = (\mathbf{H}^T \mathbf{D}_n^{inv} \mathbf{H} + \mathbf{D}_\xi^{inv} + \mathbf{F}^T \mathbf{D}_\xi^{inv} \mathbf{F})^{-1};$	$\mathbf{D}_{\nu+i} = (\mathbf{D}_{\nu+2} - \mathbf{D}_\xi^{inv} \mathbf{F} \mathbf{D}_{\nu+i-1} \mathbf{F}^T \mathbf{D}_\xi^{inv})^{-1};$
$\mathbf{M}_{\nu+2}^1 = \mathbf{D}_\xi^{inv} \mathbf{F};$	$\mathbf{M}_{\nu+i}^1 = \mathbf{D}_\xi^{inv} \mathbf{F} \mathbf{D}_{\nu+i} \mathbf{M}_{\nu+i-1}^1;$
$\mathbf{M}_{\nu+2}^2 = \mathbf{H}^T \mathbf{D}_n^{inv} \mathbf{y}_{\nu+i-1};$	$\mathbf{M}_{\nu+i}^2 = \mathbf{H}^T \mathbf{D}_n^{inv} \mathbf{y}_{\nu+i-1} + \mathbf{D}_\xi^{inv} \mathbf{F} \mathbf{D}_{\nu+i-1} \mathbf{M}_{\nu+i-1}^2;$
$\mathbf{R}_{\nu+2}^1 = \mathbf{F}^T \mathbf{D}_\xi^{inv} \mathbf{F};$	$\mathbf{R}_{\nu+i}^1 = \mathbf{R}_{\nu+i-1}^1 - \mathbf{M}_{\nu+j-1}^{1T} \mathbf{D}_{\nu+i-1} \mathbf{M}_{\nu+j-1}^1;$
$\mathbf{R}_{\nu+2}^2 = 0;$	$\mathbf{R}_{\nu+i}^2 = \mathbf{R}_{\nu+i-1}^2 + \mathbf{M}_{\nu+j-1}^{1T} \mathbf{D}_{\nu+i-1} \mathbf{M}_{\nu+j-1}^2;$

(113)