Занятие 7.
Оценка параметров сигнала

Постановка задачи: на отрезке времени $[0, T]$ принимается реализация

$$y(t) = S(t, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) + n(t), \qquad t \in [0, T], \qquad (7.1)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \left|\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k\right|^{\mathrm{T}} = const$$

- вектор информативных параметров с АПВ $p(\boldsymbol{\lambda})$

$$\boldsymbol{\mu} = \left|\mu_1, \mu_2, ..., \mu_p\right|^{\mathrm{T}} = const$$

- вектор неинформативных параметров с АПВ $p(\boldsymbol{\mu})$

$n(t)$ - БГШ с односторонней СПМ N_0

По наблюдениям (7.1) необходимо сформировать оценку $\hat{\lambda}$, оптимальную по выбранному критерию

Общее байесовское решение

При квадратичной функции потерь

$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \int \boldsymbol{\lambda} p\left(\boldsymbol{\lambda} \middle| Y_0^T\right) d\boldsymbol{\lambda}$ - если неинформативных параметров нет

$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \int\int \boldsymbol{\lambda} p\left(\boldsymbol{\lambda} \middle| Y_0^T, \boldsymbol{\mu}\right) d\boldsymbol{\lambda} p\left(\boldsymbol{\mu} \middle| Y_0^T\right) d\boldsymbol{\mu}$ - если неинформативные параметры есть

При простой функции потерь

$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \arg\max\limits_{\boldsymbol{\lambda}} p\left(\boldsymbol{\lambda} \middle| Y_0^T\right)$ - если неинформативных параметров нет

$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \arg\max\limits_{\boldsymbol{\lambda}} \int p\left(\boldsymbol{\lambda} \middle| Y_0^T, \boldsymbol{\mu}\right) p\left(\boldsymbol{\mu} \middle| Y_0^T\right) d\boldsymbol{\mu}$ - если неинформативные параметры есть

$Y_0^T = \left\{ y(t),\ t \in [0, T] \right\}$ – наблюдаемая реализация

Оценки максимального правдоподобия

Если априорная ПВ λ неизвестна, тогда применяют метод максимального правдоподобия

$$\boxed{\left.\frac{\partial \ln \rho\left(Y_0^T \middle| \lambda\right)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda = \hat{\lambda}_{\text{м}}} = 0}$$

$$\rho\left(Y_0^T \middle| \boldsymbol{\lambda}\right) = \frac{p\left(Y_0^T \middle| \boldsymbol{\lambda}\right)}{p\left(Y_0^T \middle| S(t, \boldsymbol{\lambda}) = 0\right)}$$

<<<< отношение правдоподобия (которое легко записать)

При наличии неинформативных параметров сигнала:

$$\tilde{\rho}(\boldsymbol{\lambda}) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) p(\boldsymbol{\mu}) d\boldsymbol{\mu}$$

Свойства оценок максимального правдоподобия

- **Несмещенность**

$$\boxed{M\left[\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{\text{м}}\right]=\int \hat{\boldsymbol{\lambda}}_{\text{м}}\, p\left(Y_0^T\,|\boldsymbol{\lambda}\right)dY_0^T=\boldsymbol{\lambda}}$$

- **Эффективность:** дисперсия ошибки минимальна и равна границе Рао-Крамера:

$$\boxed{D_{\tilde{\lambda}_{\text{эф}}}=\left[\int\left(\frac{\partial \ln\left(p\left(Y_0^T\,|\boldsymbol{\lambda}\right)\right)}{\partial\boldsymbol{\lambda}}\right)^2 p\left(Y_0^T\,|\boldsymbol{\lambda}\right)dY_0^T\right]^{-1}}$$

Достаточность

Оценка $\hat{\lambda}=g\left(Y_0^T\right)$ называется *достаточной*, если в результате обработки, т.е. при выполнении преобразования $g\left(Y_0^T\right)$, из наблюдений Y_0^T полностью извлечена информация об оцениваемом параметре, т.е. никакая другая обработка наблюдений (никакая другая функция $\tilde{g}\left(Y_0^T\right)$) не может дать дополнительной информации, касающейся оцениваемого параметра λ.

$$\boxed{p\left(Y_0^T\,|\lambda\right)=f\left(\lambda,\hat{\lambda}=g\left(Y_0^T\right)\right)\cdot h\left(Y_0^T\right)}$$

Неравенство Рао-Крамера

Смысл неравенства Рао-Крамера состоит в том, что средний квадрат ошибки любой оценки не превосходит некоторой нижней границы, которая определяется выражением, стоящим в правой части (7.2), и носит название нижней границы Рао-Крамера для оценки случайного параметра.

$$\boxed{D_{\hat{\lambda}} \geq \left(M\left\{ \left(\frac{\partial \ln p\left(\lambda, Y_0^T\right)}{\partial \lambda} \right)^2 \right\} \right)^{-1} = D_{\hat{\lambda}_{\text{эф}}} \qquad (7.2)}$$

В случае векторного $\boldsymbol{\lambda}$:

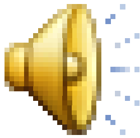
$$\mathbf{R}_{\hat{\lambda}} \geq \mathbf{J}^{-1} \longleftarrow J_{ij} = M\left[\frac{\partial \ln\left(p\left(\lambda, Y_0^T\right)\right)}{\partial \lambda_i} \cdot \frac{\partial \ln\left(p\left(\lambda, Y_0^T\right)\right)}{\partial \lambda_j} \right]$$

Оценка дискретных параметров сигнала

Пример: тональный набор номера в телефоне. Дискретный параметр – это комбинация частот, отвечающая за конкретную цифру

Википедия
Свободная энциклопедия

1	2	3	A	**697 Гц**
4	5	6	B	**770 Гц**
7	8	9	C	**852 Гц**
*	0	#	D	**941 Гц**
1209 Гц	**1336 Гц**	**1477 Гц**	**1633 Гц**	



$\lambda = \{\lambda_i\}, \quad i = \overline{1, p},$ - набор дискретных значений.

Заметим: каждому значению λ_i ставится в соответствие число i

Поэтому достаточно оценить i. $P_{ap}(\lambda_i)$ - заданы, $\sum_{i=1}^{p} P_{ap}(\lambda_i) = 1$

Оценка <u>дискретных</u> параметров сигнала

Положим, что неинформативных параметров нет. В качестве критерия возьмём простую функцию потерь и запишем для неё байесовское решающее правило.

$$\hat{\boldsymbol\lambda} = \arg\max_{\boldsymbol\lambda} p\left(\boldsymbol\lambda \middle| Y_0^T\right); \quad P\left(\lambda_i \middle| Y_0^T\right) = \frac{P_{ap}(\lambda_i)\, p\left(Y_0^T | \lambda_i\right)}{p\left(Y_0^T\right)} = \frac{P_{ap}(\lambda_i)\, p\left(Y_0^T | \lambda_i\right)}{\sum\limits_{i=1}^{p} P_{ap}(\lambda_i)\, p\left(Y_0^T | \lambda_i\right)}$$

можно прологарифмировать: $\hat{\boldsymbol\lambda} = \arg\max\limits_{\boldsymbol\lambda} \mathbf{ln}\left(P\left(\lambda_i \middle| Y_0^T\right)\right);$

$$\ln\left(P\left(\lambda_i \middle| Y_0^T\right)\right) = \ln\left(P_{ap}(\lambda_i)\right) + \ln\left(p\left(Y_0^T | \lambda_i\right)\right) - \ln\left(\cancel{\sum_{i=1}^{p} P_{ap}(\lambda_i)\, p\left(Y_0^T | \lambda_i\right)}\right)$$

$$p\left(Y_0^T | \lambda_i\right) = k \exp\left\{\frac{2}{N_0} \int_0^T S(t,\lambda_i)\left(y(t) - 0{,}5 S(t,\lambda_i)\right) dt\right\}$$

- функция правдоподобия

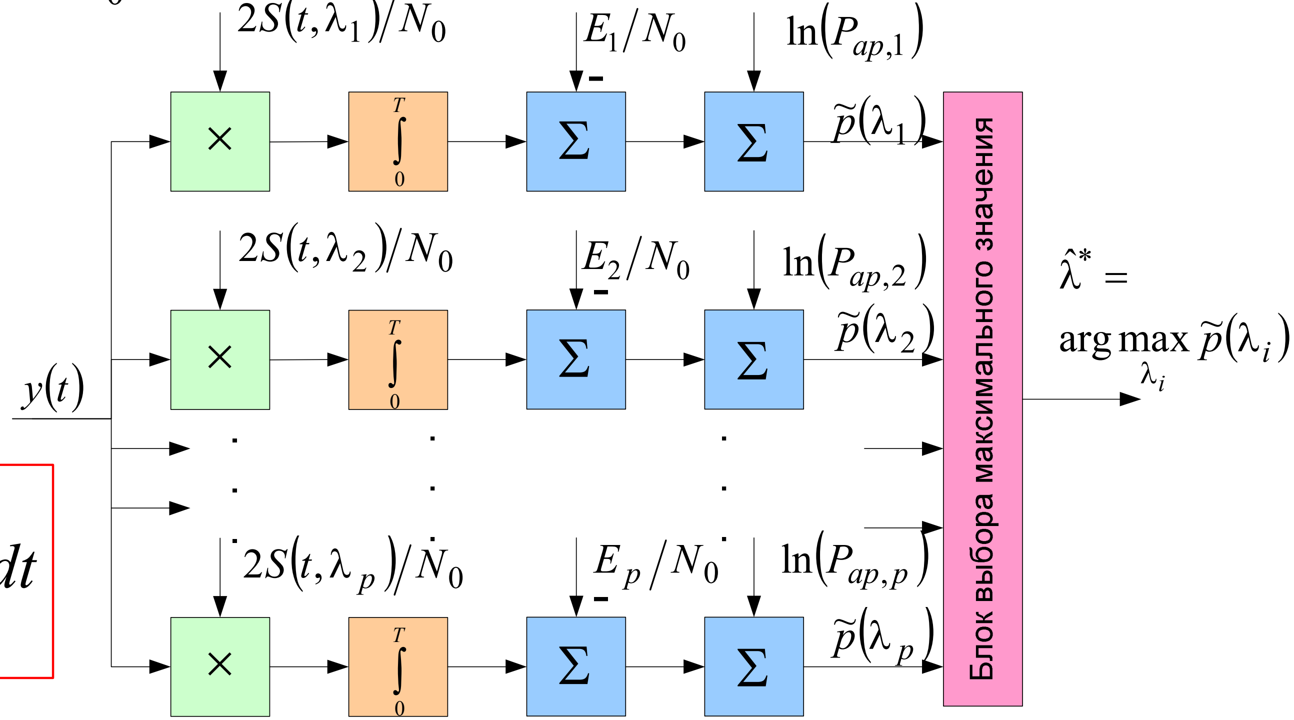
Оценка дискретных параметров сигнала

$$\tilde{p}(\lambda_i) = \ln\left(P_{ap}(\lambda_i)\right) + \frac{2}{N_0}\int_0^T y(t)S(t,\lambda_i)\,dt - \frac{E(\lambda_i)}{N_0}$$

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \arg\max_{\boldsymbol{\lambda}_i} \tilde{p}(\lambda_i);}$$

$E(\lambda_i) = \int_0^T S^2(t,\lambda_i)\,dt$ - энергия сигнала (при $\lambda = \lambda_i$)

Опять в основе - корреляционный приёмник!



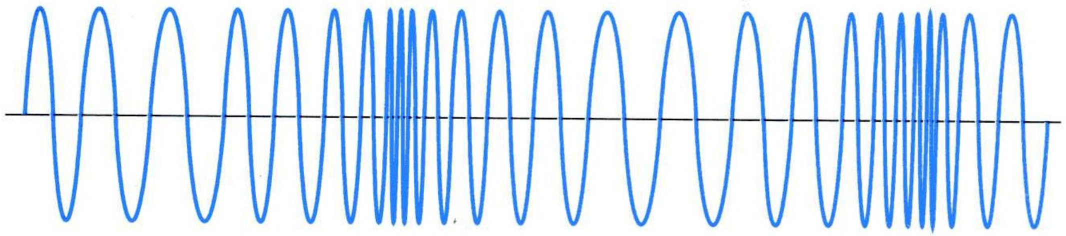
$$\boxed{u_{\text{оп}\,i}(T) = \frac{2}{N_0}\int_0^T y(t)S(t,\lambda_i)\,dt}$$

Энергетические и неэнергетические параметры сигналов

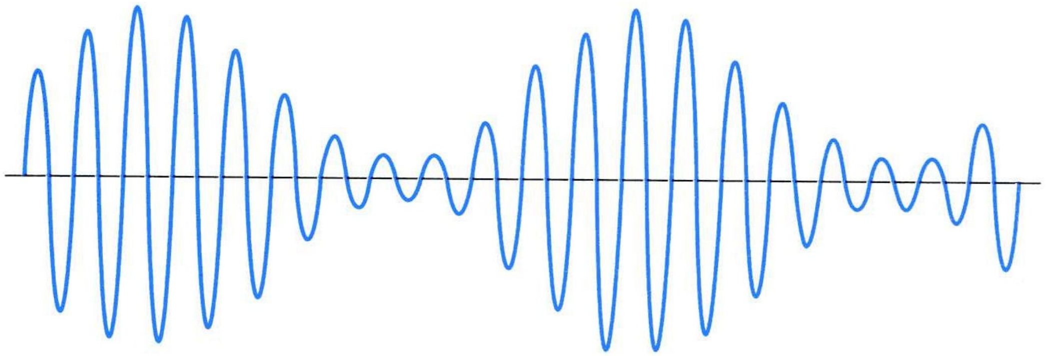
Параметры сигнала, от которых зависит его энергия, называют *энергетическими*

Энергетические параметры: амплитуда, длительность

Неэнергетические параметры: фаза, частота, задержка.



- ЧМ - изменение неэнергетического параметра.



- АМ – изменение энергетического параметра

Оценка непрерывных параметров сигнала

Аналитическое решение данной задачи иногда можно получить при простой функции потерь

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \arg\max_{\lambda} p\left(\boldsymbol{\lambda} \middle| Y_0^T\right); \quad \left.\frac{\partial p\left(\lambda \middle| Y_0^T\right)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda = \hat{\lambda}} = 0; \quad \left.\frac{\partial \ln p\left(\lambda \middle| Y_0^T\right)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda = \hat{\lambda}} = 0$$

Оценки по методу максимального правдоподобия:

$$\left.\frac{\partial \ln \rho(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\right|_{\boldsymbol{\lambda} = \hat{\boldsymbol{\lambda}}_{\text{м}}} = 0; \quad \left.\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\left(\frac{2}{N_0}\int_0^T y(t) S(t,\boldsymbol{\lambda}) d\tau - \frac{E(\boldsymbol{\lambda})}{N_0}\right)\right|_{\boldsymbol{\lambda} = \hat{\boldsymbol{\lambda}}_{\text{м}}} = 0$$

Оценка амплитуды радиоимпульса

$$S(t,\lambda) = Af(t-\tau_з)\cos(\omega t + \varphi_0), \quad t \in [0,T]$$

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad 0 \le t \le \tau_и, \\ 0, & \text{при} \quad t < 0, \quad t > \tau_и. \end{cases}$$

$\tau_з$ - время запаздывания

$\tau_и$ - длительность импульса

Уравнение правдоподобия: $$\left. \frac{\partial \ln \rho(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda = \hat{\lambda}_{\text{ì}}} = 0$$

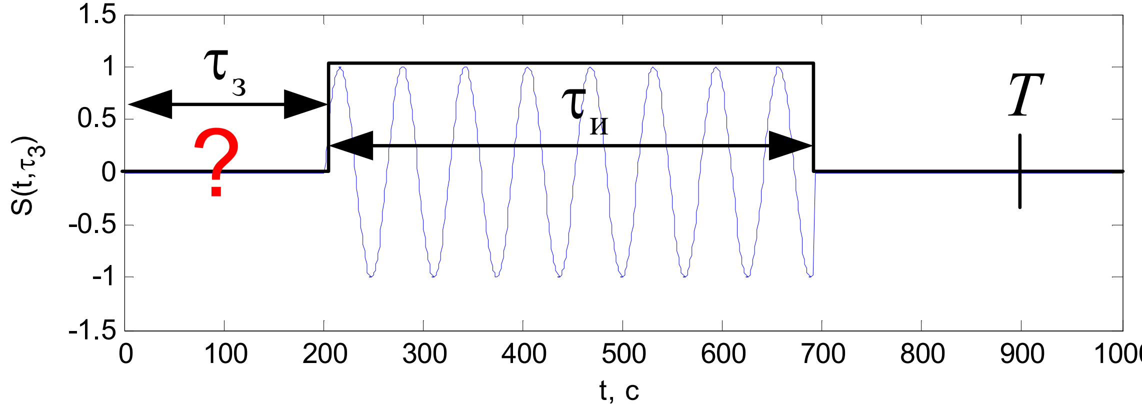
$$\left. \frac{\partial}{\partial A} \left[\frac{2}{N_0} \int_0^T Af(t-\tau_з)\cos(\omega t + \varphi_0)\big(y(t) - 0{,}5Af(t-\tau_з)\cos(\omega t + \varphi_0)\big)dt \right] \right|_{A = \hat{A}} = 0$$

$$\boxed{\hat{A} = \frac{1}{E_1} \int_0^T y(t) S_1(t) dt,} \quad S_1(t) = f(t-\tau_з)\cos(\omega t + \varphi_0), \quad E_1 = \int_0^T S_1^2(t) dt$$

Коррелятор

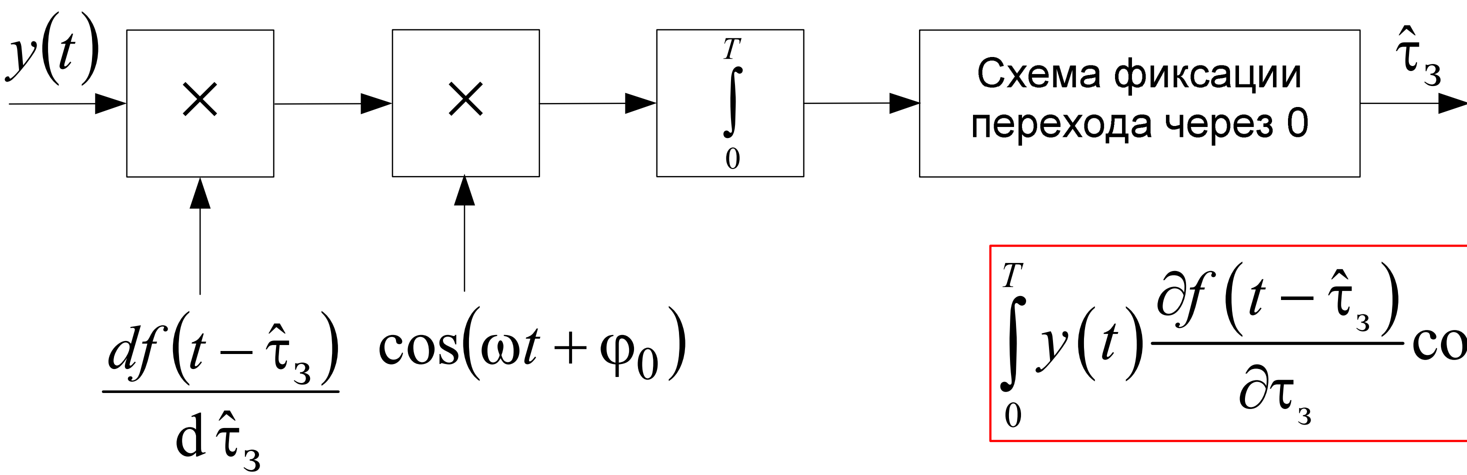
Оценка временного положения радиоимпульса по огибающей

Применим метод максимального правдоподобия.



Уравнение правдоподобия:

$$\frac{\partial}{\partial \tau_з}\left(\frac{2}{N_0}\int_0^T y(t)S(t,\tau_з)d\tau - \cancel{\frac{E}{N_0}}\right)\Bigg|_{\tau_з=\hat{\tau}_з} = 0$$



$$\boxed{\int_0^T y(t)\frac{\partial f(t-\hat{\tau}_з)}{\partial \tau_з}\cos(\omega t+\varphi_0)dt = 0}$$