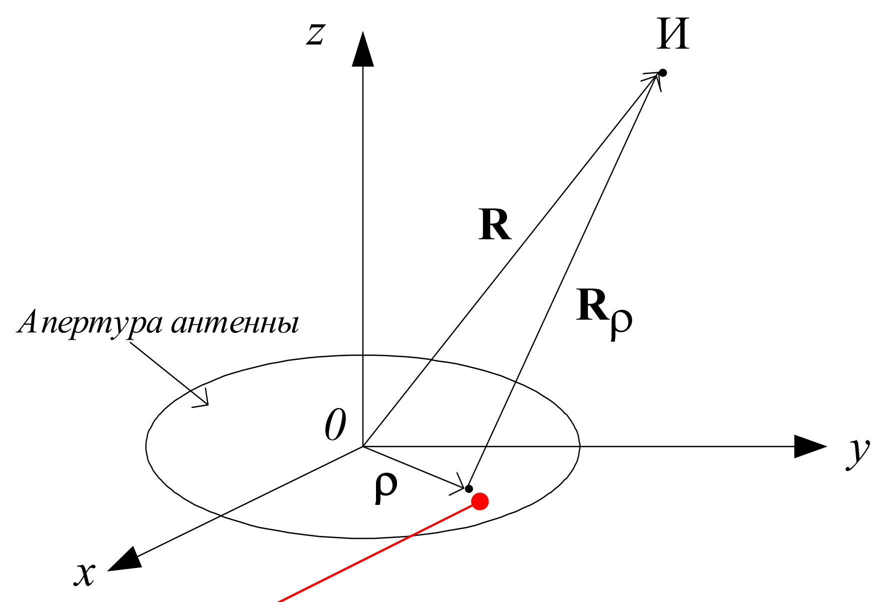
Занятие 16.
Оптимальная обработка пространственно-временных сигналов

(Перов А.И. Статистическая теория РТС: раздел 4.6 + глава 14.)

Определение

Пространственно-временным сигналом называют распределение электромагнитного поля по апертуре антенной системы.



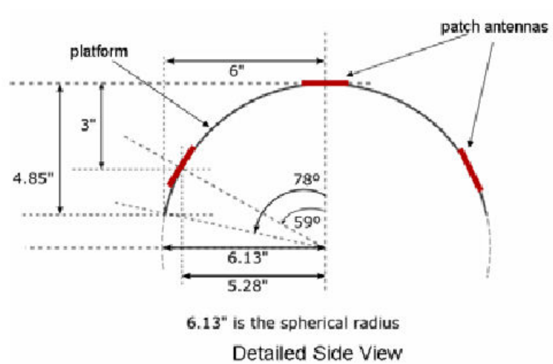
Наблюдения пространственно-временного сигнала:

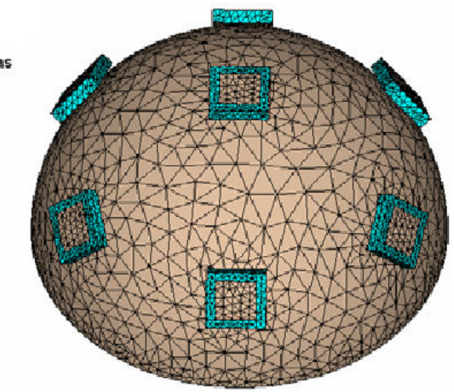
$$y(t,\boldsymbol{\rho}) = S(t,\boldsymbol{\rho}) + n(t,\boldsymbol{\rho}), \quad \boldsymbol{\rho} \in \boldsymbol{\Omega}(x,y,z)$$

$$M\left[n(t,\boldsymbol{\rho})\,n(t+\tau,\boldsymbol{\rho}+\Delta\boldsymbol{\rho})\right] = R_n(\tau,\Delta\boldsymbol{\rho})$$

Как получают пространственно-временной сигнал? Антенными решётками!

Идея: непрерывная область апертуры заменяется дискретными точками приёма:

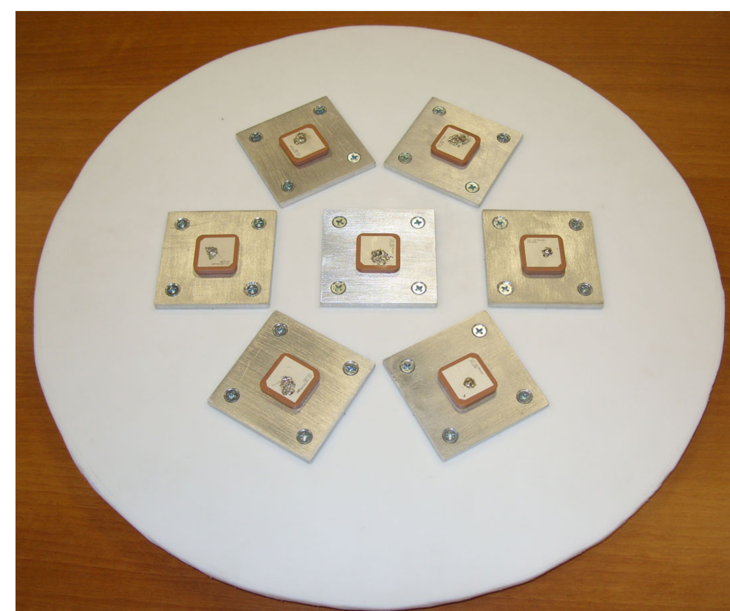




$$\boldsymbol{\rho}_i \in \left| x_i \quad y_i \quad z_i \right|^{\mathrm{T}}, \quad i = \overline{1, m}$$

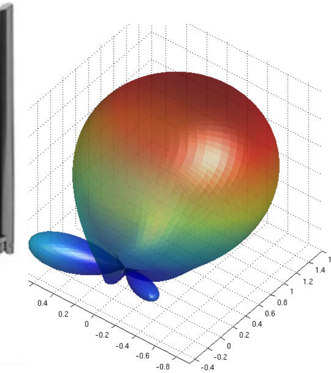
Наблюдения в каждой точке:

$$y_i(t) = S(t, \boldsymbol{\rho}_i) + n(t, \boldsymbol{\rho}_i)$$

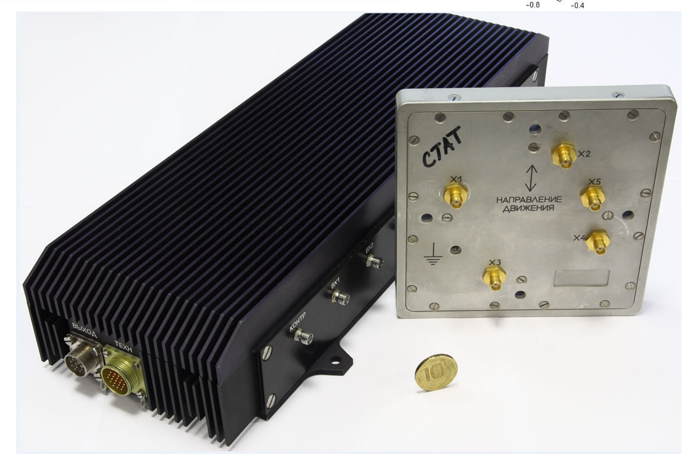


Где это используется?

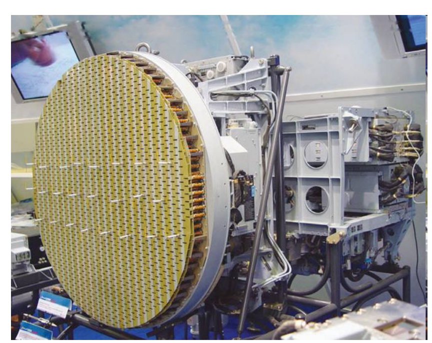
- Системы связи на основе MIMO (Wi-Fi)



- Автокомпенсаторы помех в РЛС
- Помехозащищенная НАП СРНС с адаптивными нулями диаграммы направленности



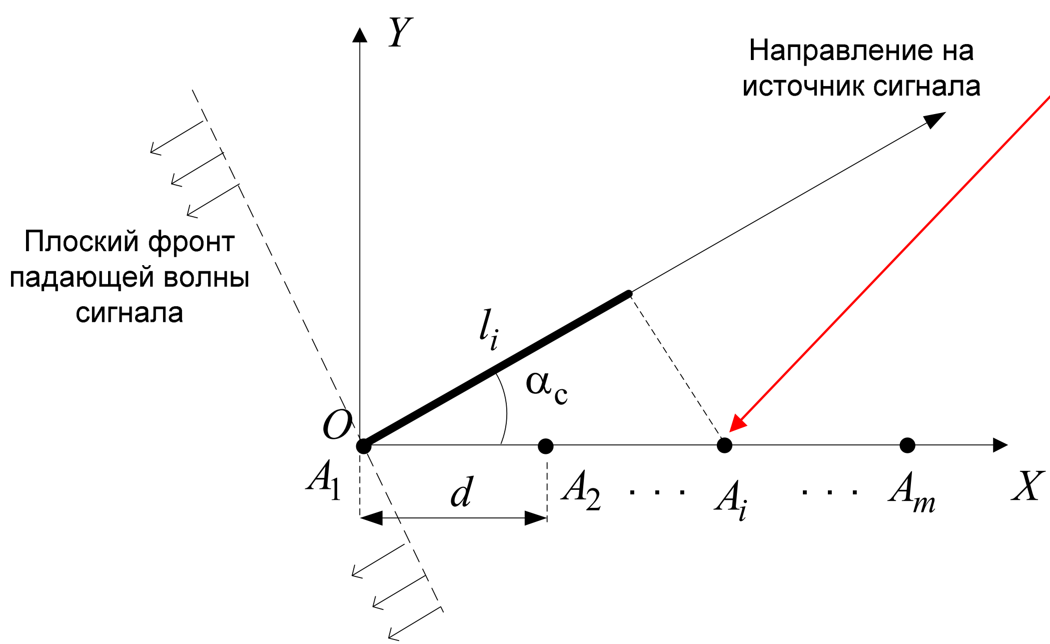
- Радиотелескопы



Метод комплексных амплитуд при описании наблюдений

Необходимые условия:

1. Полоса сигнала много меньше несущей частоты $\boxed{\Delta f_s \ll f_0}$
2. Запаздывание огибающей по апертуре антенной решетки пренебрежимо мало $\boxed{\dfrac{1}{\Delta f_s} \gg \dfrac{\Delta x}{c}}$



$$y_i(t,x_i) = \sqrt{P_c}\,S_{\text{н}i}(t,\lambda,x_i) + n_i(t,x_i)$$

$$S_{\text{н}i}(t,\lambda,x_i) = \operatorname{Re}\left\{\dot{S}_{\text{н}i}(t,\lambda,x_i)\,e^{j\omega_0 t}\right\}$$

$$\dot{S}_{\text{н}i}(t,\lambda,x_i) = \dot{S}_{\text{н}}(t,\lambda)\,e^{j\phi_i(\alpha_c)}$$

$$\phi_i(\alpha_c) = \frac{2\pi d i \cos(\alpha_c)}{\lambda_0} \qquad \left(\dot{S}_{\text{н}} \equiv \dot{S}_{\text{н}0}\right)$$

λ_0 - длина волны

P_c - мощность сигнала

Метод комплексных амплитуд при описании наблюдений

Введём вектор комплексных наблюдений:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \left| \dot{y}_1(t, x_1)\ \dot{y}_2(t, x_2)\ \ldots\ \dot{y}_m(t, x_m) \right|^{\mathrm{т}}$$

$$\dot{y}_i(t, x_i) = \sqrt{P_{\mathrm{c}}}\,\dot{S}_{\mathrm{н}}(t, \lambda)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_i(\alpha_{\mathrm{c}})} + \dot{n}_i(t)$$

Тогда

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \dot{\mathbf{H}}(\alpha_{\mathrm{c}})\,\dot{S}_{\mathrm{н}}(t, \lambda) + \dot{\mathbf{n}}(t)$$

где $\dot{\mathbf{H}}(\alpha_{\mathrm{c}}) = \sqrt{P_{\mathrm{c}}} \left| \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_1(\alpha_{\mathrm{c}})}\ \ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_2(\alpha_{\mathrm{c}})}\ \ \ldots\ \ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_m(\alpha_{\mathrm{c}})} \right|^{\mathrm{т}}$,

$\dot{\mathbf{n}} = \left| \dot{n}_1(t)\ \dot{n}_2(t)\ \ldots\ \dot{n}_m(t) \right|^{\mathrm{т}}$, $-$ вектор комплексных БГШ

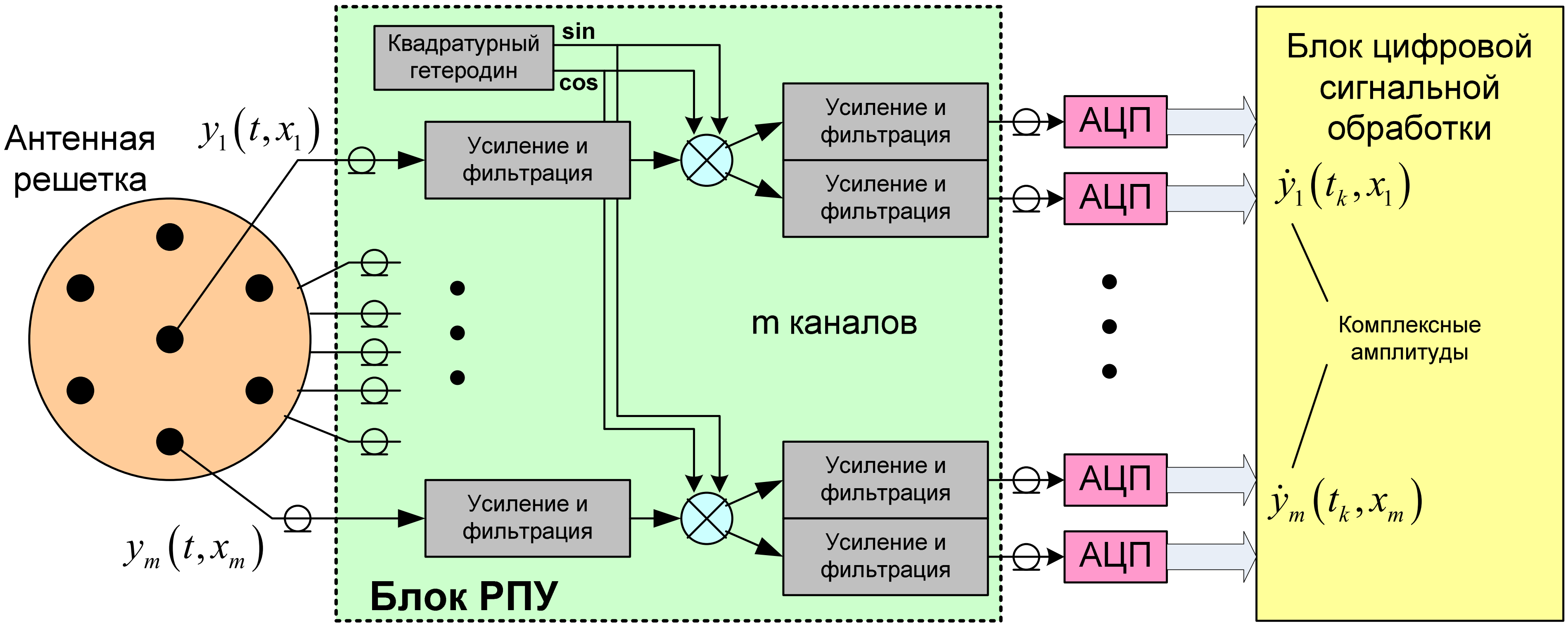
$$M\left[\dot{\mathbf{n}}(t)\,\dot{\mathbf{n}}^{*\mathrm{т}}(t + \tau)\right] = N_0 \mathbf{I} \delta(\tau)$$

От математики к делу

По определению комплексной амплитуды

$$y_i(t,x_i) = \mathrm{Re}\left\{\dot{y}_i(t,x_i)\cdot \mathrm{e}^{j\omega_0 t}\right\} \Rightarrow \dot{y}_i(t,x_i) \approx \text{ФНЧ}\left(y_i(t,x_i)\cdot \mathrm{e}^{-j\omega_0 t}\right)$$

В реальной аппаратуре комплексные амплитуды фактически получают на выходе квадратурного гетеродинного приемника – и их обрабатывают



Отношение правдоподобия для пространственно-временного сигнала

- Отношение правдоподобия используется в задачах обнаружения и оценки параметров сигнала

Запишем сразу логарифм отношения правдоподобия

Для непрерывного времени:

$$\ln\left(\rho\left(\mathbf{Y}_0^t\right)\right)=\frac{1}{N_0}\operatorname{Re}\left[\int_0^t \dot{S}_{\text{н}}^*(\tau,\lambda)\dot{\mathbf{H}}^{*\text{т}}(\alpha_{\text{c}})\left(\dot{\mathbf{y}}(\tau)-0{,}5\dot{\mathbf{H}}(\alpha_{\text{c}})\dot{S}_{\text{н}}(\tau,\lambda)\right)d\tau\right]$$

Для дискретного времени:

$$\ln\left(\rho\left(\mathbf{Y}_0^N\right)\right)=\frac{1}{\sigma_n^2}\operatorname{Re}\left[\sum_{k=1}^{N}\dot{S}_{\text{н},k}^*(\lambda)\dot{\mathbf{H}}^{*\text{т}}(\alpha_{\text{c},k})\left(\dot{\mathbf{y}}_k-0{,}5\dot{\mathbf{H}}(\alpha_{\text{c},k})\dot{S}_{\text{н},k}(\lambda)\right)\right]$$

Алгоритм обнаружения пространственно-временного сигнала

Оптимальное решающее правило из теории статистических решений (см. Занятие 4):

$$u_0\left(\mathbf{Y}_0^T\right)=\begin{cases}\hat{\vartheta}=1, & \text{если} \quad \rho\left(\mathrm{Y}_0^T\right)\geq h_0 \quad (\text{сигнал есть}),\\ \hat{\vartheta}=0, & \text{если} \quad \rho\left(\mathrm{Y}_0^T\right)< h_0 \quad (\text{сигнала нет})\end{cases}$$

Величину порога можно найти, например, по критерию Неймана-Пирсона. Подставим в это неравенство отношение правдоподобия и прологарифмируем:

$$\operatorname{Re}\left[\sum_{k=1}^{N}\dot{S}^{*}_{\text{н},k}(\lambda)\dot{\mathbf{H}}^{*\text{т}}\left(\alpha_{\text{с},k}\right)\left(\dot{\mathbf{y}}_k-0{,}5\dot{\mathbf{H}}\left(\alpha_{\text{с},k}\right)\dot{S}_{\text{н},k}(\lambda)\right)\right]\geq \ln\left(h_0\right)\sigma_n^2$$

Алгоритм обнаружения пространственно-временного сигнала

Раскроем скобки под суммой и перенесём детерминированную часть вправо:

$$\mathrm{Re}\left[\sum_{k=1}^{N}\dot{S}^{*}_{\text{н},k}(\lambda)\dot{\mathbf{H}}^{*\text{т}}(\alpha_{\text{c},k})\dot{\mathbf{y}}_k\right]\geq 0{,}5\,\mathrm{Re}\left[\sum_{k=1}^{N}\dot{S}^{*}_{\text{н},k}(\lambda)\dot{S}_{\text{н},k}(\lambda)\dot{\mathbf{H}}^{*\text{т}}(\alpha_{\text{c},k})\dot{\mathbf{H}}(\alpha_{\text{c},k})\right]+\ln(h_0)\sigma_n^2,$$

$$\overline{\dot{S}^{*}_{\text{н},k}(\lambda)\dot{S}_{\text{н},k}(\lambda)}=1,\quad \dot{\mathbf{H}}^{*\text{т}}(\alpha_{\text{c},k})\dot{\mathbf{H}}(\alpha_{\text{c},k})=mP_c\quad\Rightarrow$$

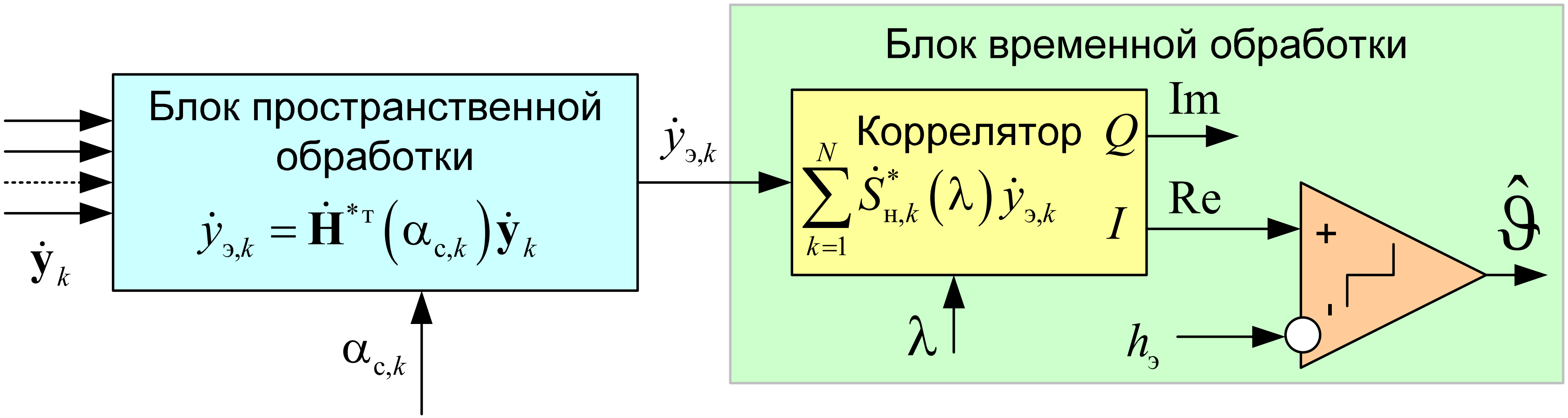
$$\Rightarrow\mathrm{Re}\left[\sum_{k=1}^{N}\dot{S}^{*}_{\text{н},k}(\lambda)\dot{\mathbf{H}}^{*\text{т}}(\alpha_{\text{c},k})\dot{\mathbf{y}}_k\right]\geq 0{,}5mNP_c+\ln(h_0)\sigma_n^2=h_\text{э}$$

Введём эквивалентные наблюдения: $\dot{y}_\text{э}=\dot{\mathbf{H}}^{*\text{т}}(\alpha_{\text{c},k})\dot{\mathbf{y}}_k$

Окончательный алгоритм обнаружения:

$$\boxed{\dot{y}_{\text{э},k}=\dot{\mathbf{H}}^{*\text{т}}(\alpha_{\text{c},k})\dot{\mathbf{y}}_k;\quad \hat{\vartheta}=\left\{\mathrm{Re}\left[\sum_{k=1}^{N}\dot{S}^{*}_{\text{н},k}(\lambda)\dot{y}_{\text{э},k}\right]\geq h_\text{э}\right\}}$$

Схема оптимального пространственного обнаружителя



ВАЖНО!

- **Оптимальная пространственно-временная обработка сигналов (ПВОС) разбивается на раздельную пространственную и временную обработку.**