# Занятие 5.
# Обнаружение сигналов

**Характеристики обнаружения:**

Вероятность правильного обнаружения – $P_D$

Вероятность ложной тревоги - $P_F$

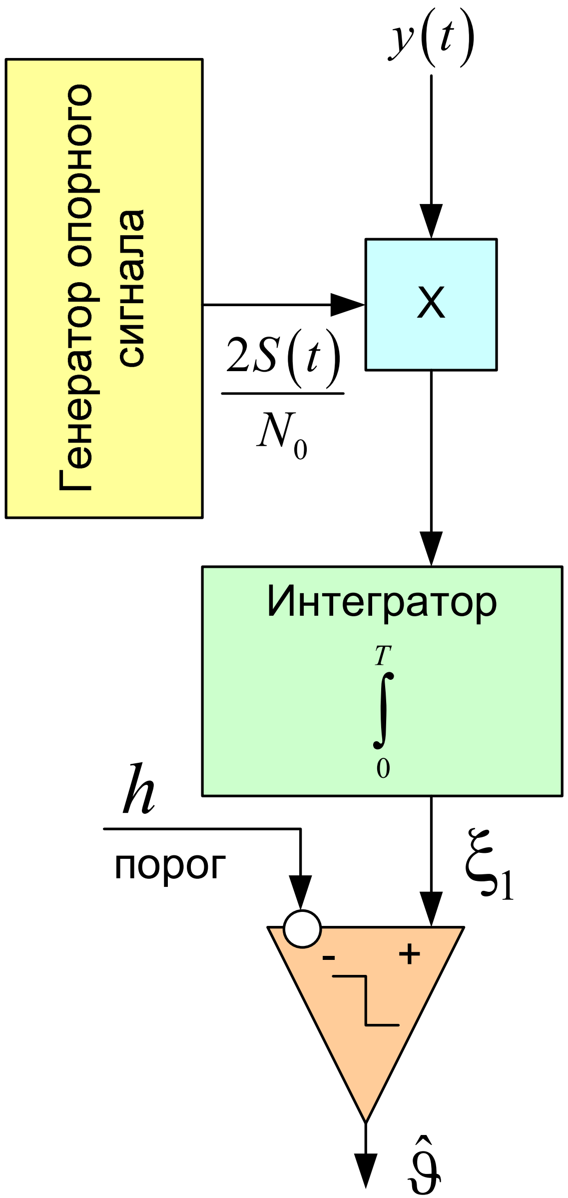
Сигнал на выходе оптимального приемника:

$$\xi_1 = \frac{2}{N_0}\int_0^T y(\tau)S(\tau)d\tau = \frac{2}{N_0}\int_0^T \left(S(\tau)+n(\tau)\right)S(\tau)d\tau$$

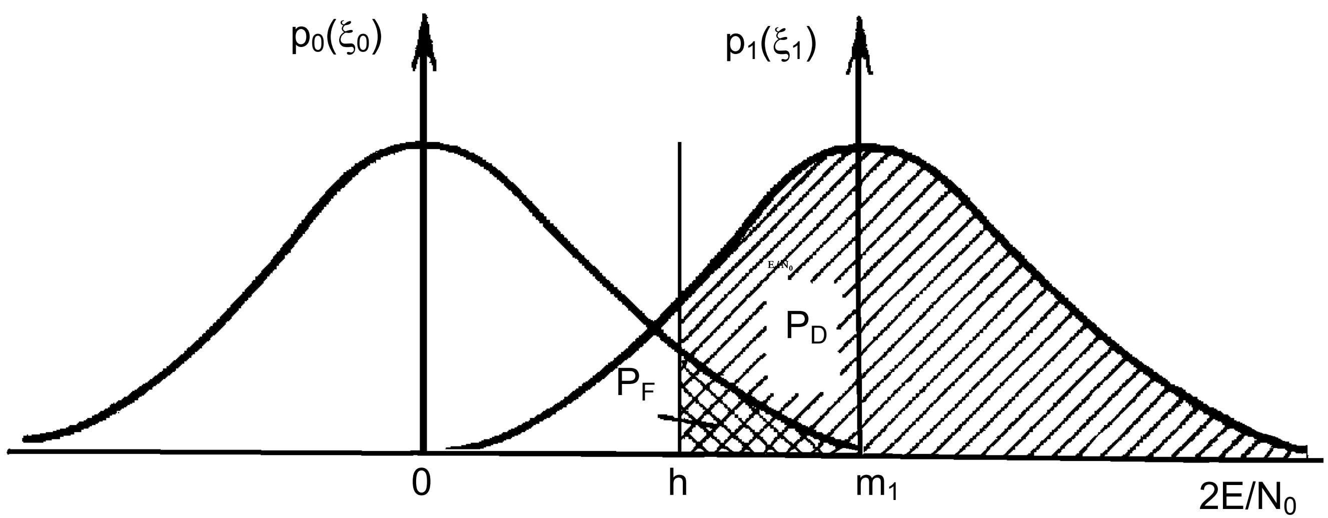
# Характеристики обнаружения

$$m_1 = M[\xi_1] = M\left[\frac{2}{N_0}\int_0^T y(\tau)S(\tau)d\tau\right] = M\left[\frac{2}{N_0}\int_0^T (S(\tau)+n(\tau))S(\tau)d\tau\right] = \frac{2E}{N_0}$$

$$D_1 = M\left[(\xi_1 - m_1)^2\right] = M\left[\left(\frac{2}{N_0}\int_0^T n(\tau)S(\tau)d\tau\right)^2\right] = \frac{2E}{N_0}$$




## Гауссовские ПВ при наличии и отсутствии сигнала



# Характеристики обнаружения

$$P_F = \int_h^{\infty} p_0(\xi)d\xi = 1 - \Phi\left(\frac{h}{\sqrt{2E/N_0}}\right)$$

$$P_D = \int_h^{\infty} p_1(\xi)d\xi = 1 - \Phi\left(\frac{h}{\sqrt{2E/N_0}} - \sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right)$$

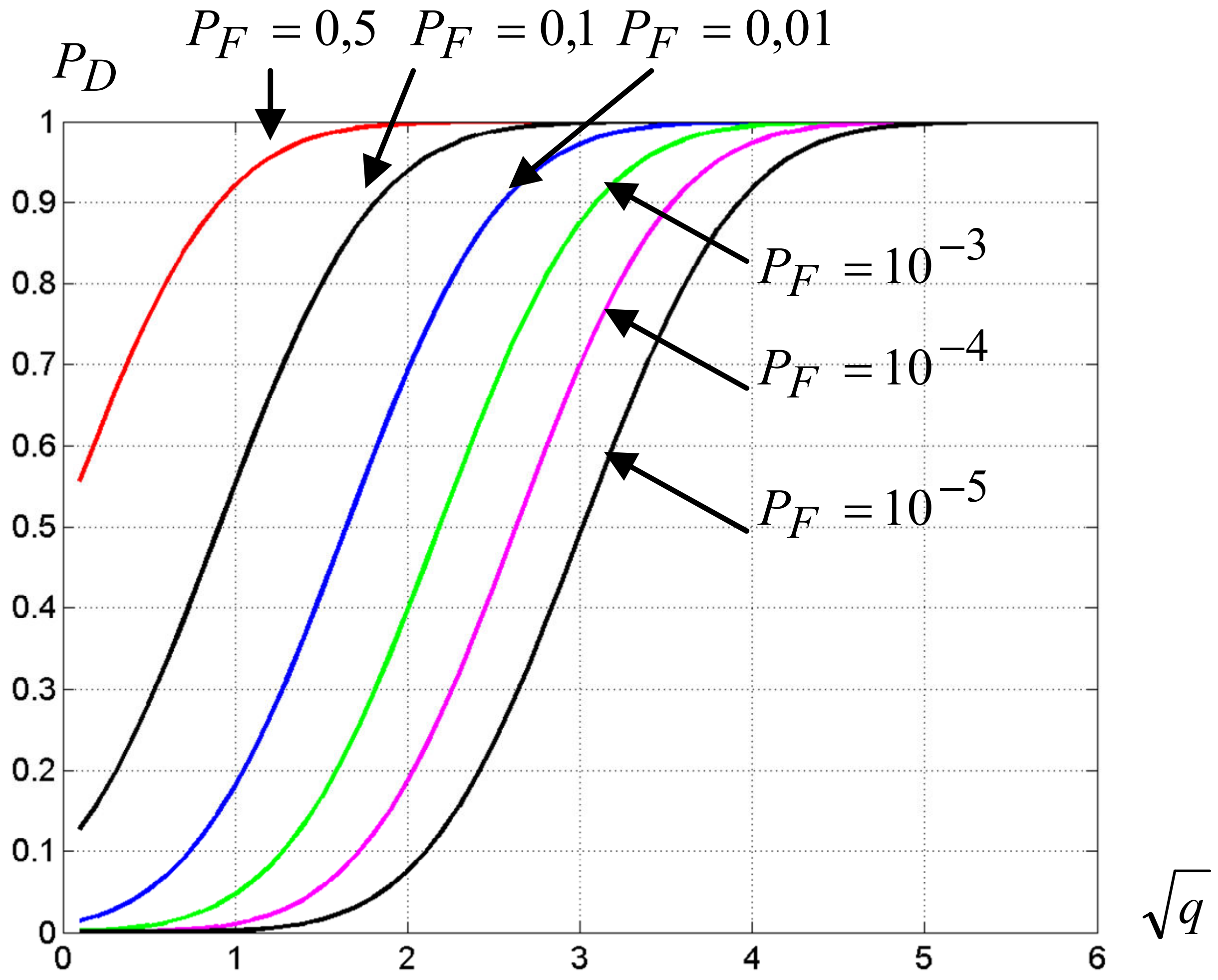
где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt$ - интеграл вероятности

$h$ - порог сравнения

$E$ - энергия сигнала

$N_0$ - спектральная плотность шума

# Кривые обнаружения детерминированного сигнала




$$q = E / N_0$$

# Обнаружение сигнала со случайными параметрами

Наблюдается реализация

$$y(t) = \vartheta S(t, \mu) + n(t), \quad 0 \le t \le T$$

$\mu$ – случайные неинформативные параметры сигнала с априорной плотностью вероятностей $p_{ap}(\mu)$.

По свойству согласованности ПВ

$$p\left(Y_0^T \middle| \vartheta\right) = \int P\left(Y_0^T, \mu \middle| \vartheta\right) d\mu = \int P\left(Y_0^T \middle| \vartheta, \mu\right) p_{ap}(\mu) d\mu$$

# Отношение правдоподобия

$$\rho\left(Y_0^T\right)=\frac{p\left(Y_0^T\,|\,\vartheta=1\right)}{p\left(Y_0^T\,|\,\vartheta=0\right)}=\frac{\int P\left(Y_0^T\,|\,\vartheta=1,\mu\right)p_{ap}(\mu)d\mu}{P\left(Y_0^T\,|\,\vartheta=0\right)}=\int \rho\left(Y_0^T\,|\,\mu\right)p_{ap}(\mu)d\mu$$

(необходимо усреднить отношение правдоподобия по случайным параметрам)

Байесовское решение при простой функции потерь:

$$\hat{\vartheta}=\left\{\rho\left(Y_0^T\right)\geq h\right\} \qquad h=\frac{P_{ap}(0)}{P_{ap}(1)}$$

Общий вид сигнала в радиотехнике:

$$S(t,\lambda,\mu)=aA(t)\cos\left(\omega_0 t+\varphi(t)+\varphi_0\right)$$

# Практический пример:

## Обнаружение сигнала с неизвестной фазой и амплитудой по дискретной выборке

Входная выборка:

$$y_k = \boxed{a} \cdot A\left(kT - \tau_k\right)\cos\left(\left(\omega_0 + \omega_{\text{д}}\right)kT + \boxed{\varphi_0}\right) + n_k,$$

$$k = \overline{1, m}$$

$$p\left(n_k\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}\exp\left(-\frac{n^2}{2\sigma_n^2}\right)$$ -- гауссовское распределение

$$p\left(a\right) = \frac{a}{\sigma_a^2}\mathrm{e}^{-a^2/2\sigma_a^2}$$ -- рэлеевское распределение

$$p\left(\varphi_0\right) = \begin{cases} 1/\left(2\pi\right) & \varphi_0 \in \left(-\pi, \pi\right] \\ 0 & \varphi_0 \notin \left(-\pi, \pi\right] \end{cases}$$ -- равномерное распределение

# Усреднение отношения правдоподобия

$$\rho\left(Y_1^m \mid a,\varphi_0\right)=\exp\left\{\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{m}S_k\left(a,\varphi_0\right)\left(y_k-\frac{1}{2}S_k\left(a,\varphi_0\right)\right)\right\}=$$

$$=\exp\left\{\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{m}y_k S_k\left(a,\varphi_0\right)\right\}\cdot\exp\left\{-\frac{a^2\alpha}{2\sigma_n^2}\right\},\quad E=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}S_k^2\left(a,\varphi_0\right)=\frac{a^2\alpha}{2}$$

$$\boxed{\rho\left(Y_1^m\right)}=\int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\rho\left(Y_1^m \mid a,\varphi_0\right)p\left(\varphi_0\right)p\left(a\right)d\varphi_0 da=$$

$$=\int_0^{\infty}\exp\left\{-\frac{a^2\alpha}{2\sigma_n^2}\right\}\frac{a}{\sigma_a^2}e^{-a^2/2\sigma_a^2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left\{\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{m}y_k S_k\left(a,\varphi_0\right)\right\}d\varphi_0 da$$

# Усреднение отношения правдоподобия

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left\{\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{m}y_k S_k\left(a,\varphi_0\right)\right\}d\varphi_0 =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left\{\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{m}y_k aA\left(kT-\tau\right)\cos\left(\left(\omega_0+\omega_{д}\right)kT+\varphi_0\right)\right\}d\varphi_0 = I_0\left(\frac{2a}{\sigma_n^2}X\right)$$

- функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента

$$X=\sqrt{X_c^2+X_s^2},$$

$$X_c=\sum_{k=1}^{m}y_k A\left(kT-\tau\right)\cos\left(\left(\omega_0+\omega_{д}\right)kT\right),$$

$$X_s=\sum_{k=1}^{m}y_k A\left(kT-\tau\right)\sin\left(\left(\omega_0+\omega_{д}\right)kT\right).$$

Отсюда $$\rho\left(Y_1^m\right)=\int_0^{\infty}\frac{a}{\sigma_a^2}\exp\left\{-\frac{a^2\alpha}{2\sigma_n^2}\right\}\exp\left\{-\frac{a^2}{2\sigma_a^2}\right\}I_0\left(\frac{2a}{\sigma_n^2}X\right)da$$

# Страшный интеграл взят

$$\rho\left(Y_1^m\right)=\int_0^\infty \frac{a}{\sigma_a^2}\exp\left\{-\frac{a^2\alpha}{2\sigma_n^2}\right\}\exp\left\{-\frac{a^2}{2\sigma_a^2}\right\}I_0\left(\frac{2a}{\sigma_n^2}X\right)da=$$

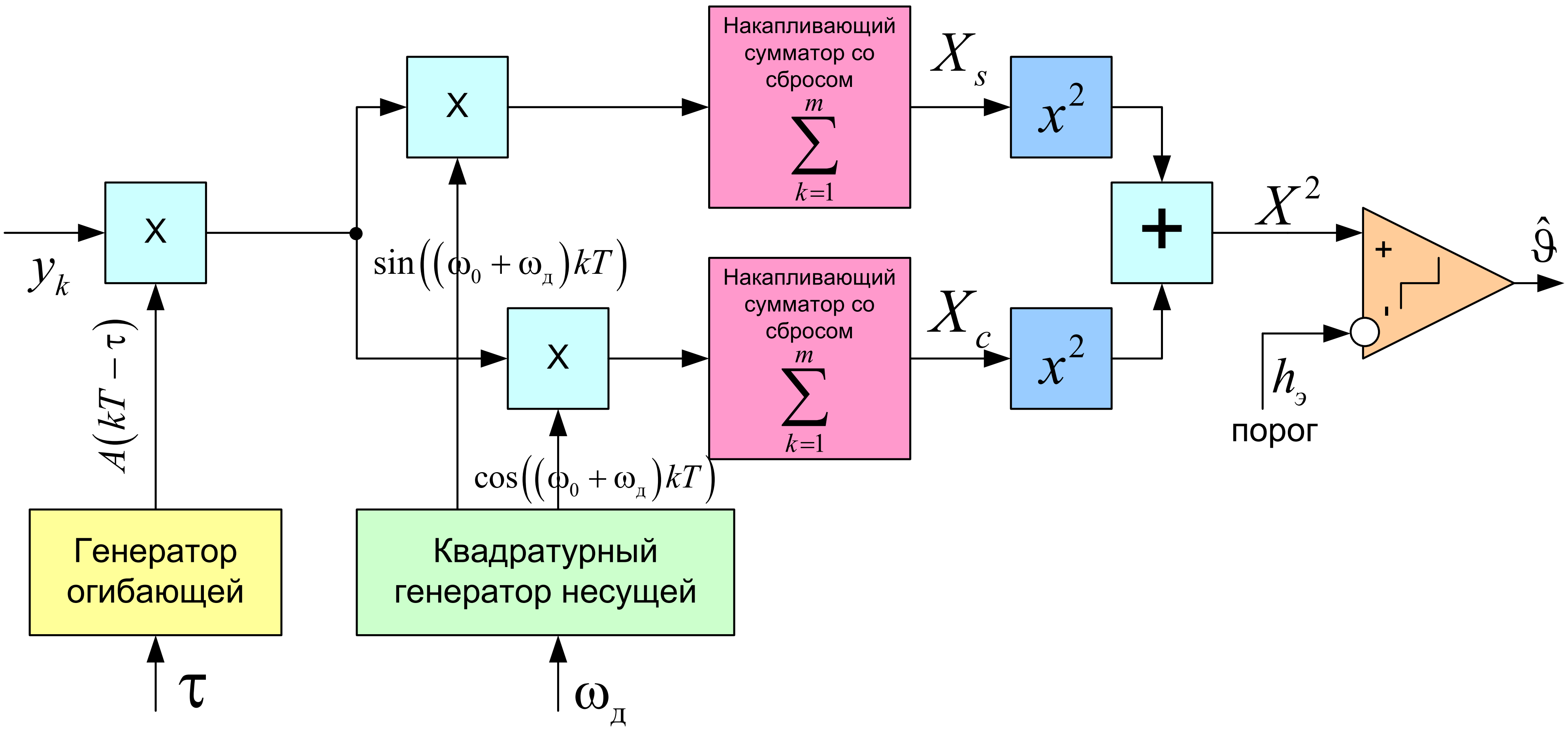
$$=\frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2+\alpha\sigma_a^2}\exp\left\{\frac{2\sigma_a^2}{\sigma_n^2\left(\sigma_n^2+\alpha\sigma_a^2\right)}X^2\right\},\ \text{введём } q_э=\frac{\alpha\sigma_a^2}{\sigma_n^2},\ \text{тогда}$$

$$\rho\left(Y_1^m\right)=\frac{1}{1+q_э}\exp\left\{\frac{2\sigma_a^2}{\sigma_n^4\left(1+q_э\right)}X^2\right\}\geq h$$

Решающее правило заключается в сравнении с порогом. Раскрываем неравенство.

$$X^2\geq \ln\left(\left(1+q_э\right)h\right)\frac{\sigma_n^4\left(1+q_э\right)}{2\sigma_a^2}=h_э$$

# Структура оптимального обнаружителя



# Письменное домашнее задание

Дано: $P_F = 1 / \left( \sum \text{номеров букв фамилии} \right)$

Найти: $P_D(q_э) = ?$

(требуется вывести аналитическое выражение и построить график на компьютере)