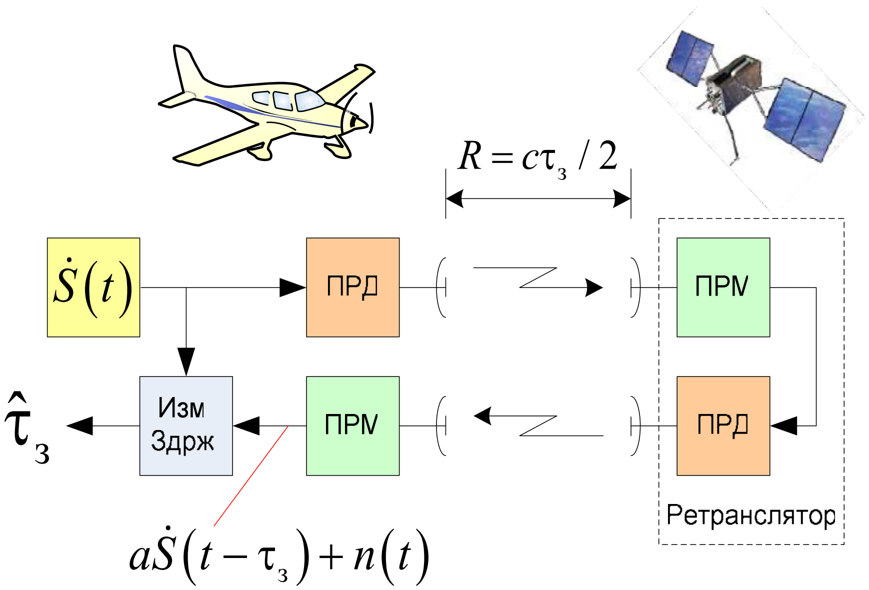
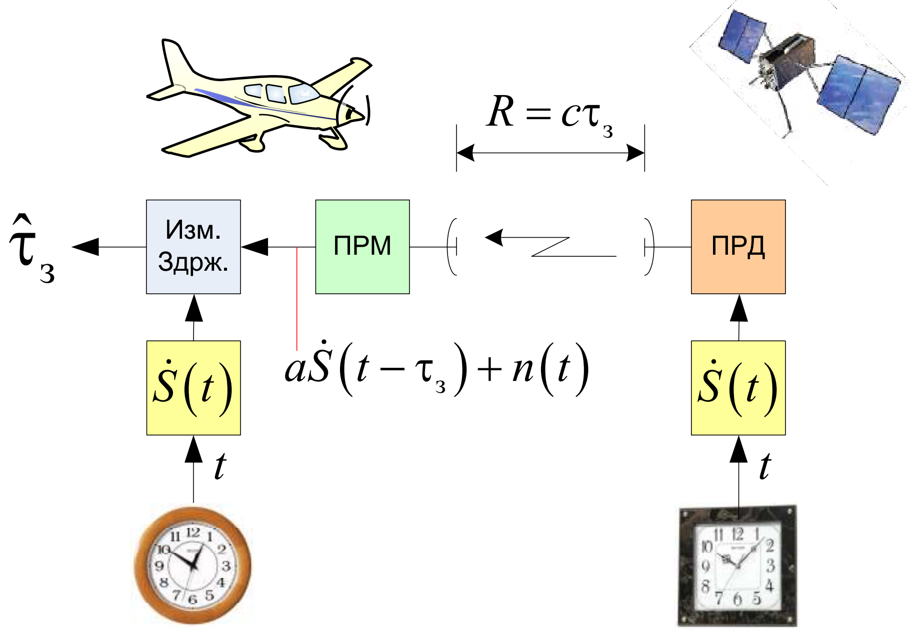
Лекция 3. Шкалы времени. Псевдодальность. Псевдоскорость.

Запросный метод измерения дальностей



Беззапросный метод измерения дальностей



Беззапросные РНС более технологичны, но в них определение истинной дальности невозможно из-за рассинхронизации часов передатчика и приемника

Время, часы и шкалы времени

- **Физическое время *t*** — это непрерывная величина, априорная характеристика мира, ничем не определяемая (фундаментальное понятие).

- **Часы** – совокупность средств и действий, направленных на определение количественного значения времени на основе наблюдения за фазой некоторого периодического процесса.

- **Шкала времени** – временная «координатная» система, связанная с конкретными часами.

- **Шкала времени системы** (ШВС) – шкала времени, связанная с часами радионавигационной системы.

- **Шкала времени потребителя** (ШВП) – шкала времени, связанная с часами потребителя.

Радиосигнал – переносчик показаний часов системы

- **Время предшествия** – показания часов системы, наблюдаемые в структуре навигационного радиосигнала в точке приема

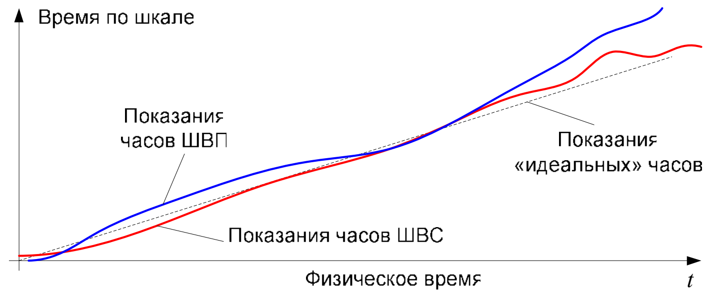
$t^{\text{ШВП}}$ – показания часов потребителя

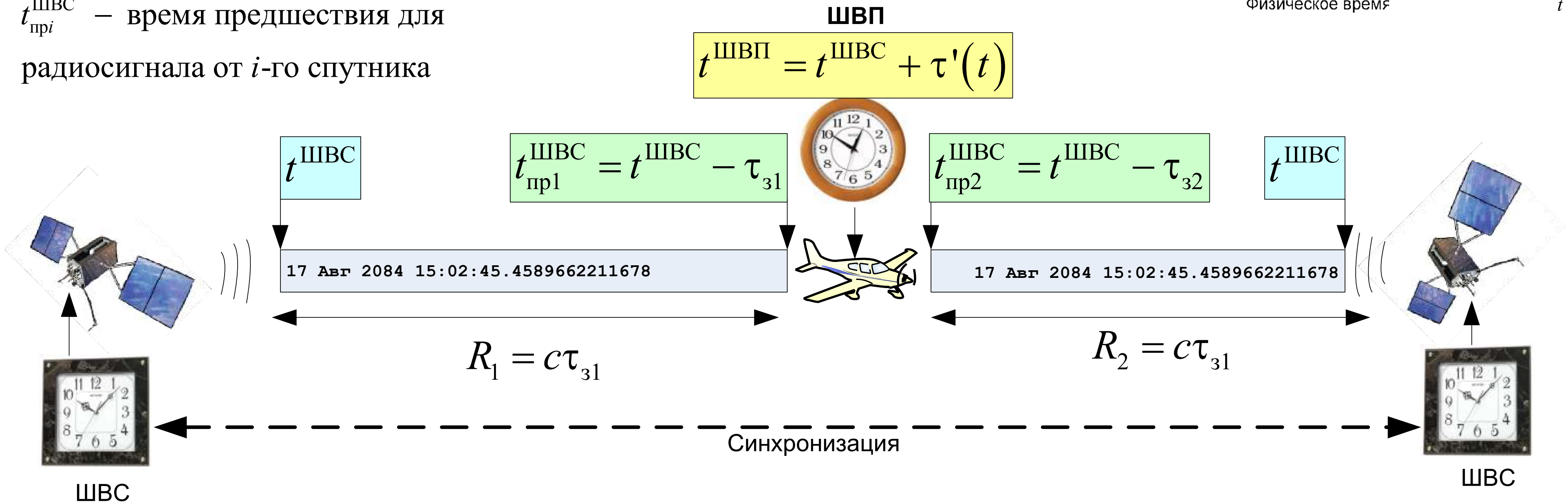
$t^{\text{ШВС}}$ – показания часов системы

$\tau' = \left(t^{\text{ШВП}} - t^{\text{ШВС}}\right)$ – смещение ШВП относительно ШВС

$\tau_{зi}$ – время запаздывания радиосигнала от i-го спутника

$t^{\text{ШВС}}_{\text{пр}i}$ – время предшествия для радиосигнала от i-го спутника





Псевдозадержка и псевдодальность

- **Псевдозадержка** – разность показаний собственных часов приемника и времени предшествия для *i*-го принимаемого радиосигнала в момент измерения

$$\breve{\tau}_i = \left(t^{\text{ШВП}} - t^{\text{ШВС}}_{\text{пр}i}\right) = \left(\cancel{t^{\text{ШВС}}} + \tau' - \cancel{t^{\text{ШВС}}} + \tau_{\text{з}i}\right) = \tau_{\text{з}i} + \tau'$$

Псевдозадержка отличается от истинной задержки на величину смещения ШВП относительно ШВС

- **Псевдодальность** – это псевдозадержка, умноженная на скорость света

$$\breve{R}_i = c\breve{\tau}_i = c\tau_{\text{з}i} + c\tau' = R_i + D'$$

Обозначение: $D' = c\tau'$

Псевдозадержка – это РНП, псевдодальность – это НП.

Псевдоскорость

- **Псевдоскорость** – это производная псевдодальности по времени

$$\breve{V}_i = \frac{\mathrm{d}\breve{R}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}R_i}{\mathrm{d}t} + c\frac{\mathrm{d}\tau'}{\mathrm{d}t} = V_i + c\frac{\mathrm{d}\tau'}{\mathrm{d}t}$$

Обозначим:

$$V' = c\frac{\mathrm{d}\tau'}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \breve{V}_i = V_i + V'$$

Модель часов, тактируемых от опорного генератора с частотой f_0 :

$$\frac{\mathrm{d}t^{\text{ШВ}}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{f_0} f_{\text{ОГ}}(t); \quad f_{\text{ОГ}}(t) = f_0 + \Delta f_{\text{ОГ}}(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}t^{\text{ШВ}}(t)}{\mathrm{d}t} = 1 + \frac{\Delta f_{\text{ОГ}}(t)}{f_0} = 1 + \delta_{\text{ОГ}}(t)$$

$\delta_{\text{ОГ}}(t) = \dfrac{\Delta f_{\text{ОГ}}(t)}{f_0}$ - мгновенная относительная нестабильность частоты ОГ

$$\frac{\mathrm{d}\tau'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(t^{\text{ШВП}} - t^{\text{ШВС}}\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}t^{\text{ШВП}}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}t^{\text{ШВС}}}{\mathrm{d}t} = \delta_{\text{ОГ.ШВП}}(t) - \delta_{\text{ОГ.ШВС}}(t) \approx \delta_{\text{ОГ.ШВП}}(t)$$

$\delta_{\text{ОГ.ШВС}}(t) \approx 0$ – пренебрегаем нестабильностью часов системы

Отсюда: $\breve{V}_i = V_i + V', \quad V' = c\delta_{\text{ОГ.ШВП}}$

Псевдодоплеровская частота

- **Псевдодоплеровская частота** – наблюдаемое доплеровское смещение частоты с учетом нестабильности частот опорных генераторов (ОГ) передатчика и приемника.

$$\breve{f}_{\text{д}i} = f_{\text{д}i} + \Delta f; \qquad \Delta f = f_0 \delta_{\text{ОГ.ШВП}} - f_0 \delta_{\text{ОГ.ШВС}} \approx f_0 \delta_{\text{ОГ.ШВП}}$$

Связь псевдодоплеровской частоты с псевдоскоростью и псевдозадержкой:

$$\breve{f}_{\text{д}i} = f_{\text{д}i} + f_0 \delta_{\text{ОГ.ШВП}} = \frac{f_0}{c} V_i + \frac{c}{c} f_0 \delta_{\text{ОГ.ШВП}} = \frac{f_0}{c}\left(V_i + c\delta_{\text{ОГ.ШВП}}\right) = \frac{f_0}{c} \breve{V}_i$$

$$\breve{f}_{\text{д}i} = \frac{f_0}{c} \breve{V}_i = \frac{f_0}{c} \frac{\mathrm{d}\breve{R}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{f_0}{c} \frac{\mathrm{d}\left(c\breve{\tau}_i\right)}{\mathrm{d}t} = f_0 \frac{\mathrm{d}\breve{\tau}_i}{\mathrm{d}t}$$

Псевдодоплеровская частота– это РНП, псевдоскорость – это НП.

Итого
(этимология приставки «псевдо-»)

- Псевдозадержка $$\breve{\tau}_i = \tau_{\text{з}i} + \tau'$$
- Псевдодальность $$\breve{R}_i = c\breve{\tau}_i$$
- Псевдодоплеровская частота $$\breve{f}_{\text{д}i} = f_{\text{д}i} + f_0\delta_{\text{ОГ.ШВП}}$$
- Псевдоскорость $$\breve{V}_i = \frac{c}{f_0}\breve{f}_{\text{д}i}$$

Псевдодальномерный метод

ПОСТАНОВКА НАВИГАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Дано:

1. Вектор измерений псевдодальностей (*N* измерений):

$$\breve{\tilde{\mathbf{R}}} = \left| \breve{\tilde{R}}_1 \quad \breve{\tilde{R}}_2 \quad \dots \quad \breve{\tilde{R}}_N \right|^{\mathrm{T}}, \quad \left(\widehat{*} \text{- измерение} \right)$$

2. Координаты *N* опорных точек (радиомаяков, навигационных спутников), записанные в векторном виде:

$$\mathbf{x}_1 = \left| x_1 \; y_1 \; z_1 \right|^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{x}_2 = \left| x_2 \; y_2 \; z_2 \right|^{\mathrm{T}}, \quad \dots \quad \mathbf{x}_N = \left| x_N \; y_N \; z_N \right|^{\mathrm{T}}$$

Найти: расширенный вектор состояния: $\boldsymbol{\chi} = \left| \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \; D' \right|^{\mathrm{T}}$, где $\mathbf{x} = \left| x_{\mathrm{o}} \; y_{\mathrm{o}} \; z_{\mathrm{o}} \right|^{\mathrm{T}}$

Псевдодальномерным методом находят не только пространственные координаты, но и точное время за счет включения в вектор состояния параметра *D’*, имеющего смысл поправки к ШВП, выраженной в метрах:

$$D' = c\tau' = c\left(t^{\text{ШВП}} - t^{\text{ШВС}} \right)$$

Решение навигационной задачи

1. Запишем функциональную связь между измеряемой псевдодальностью и пространственно-временным положением объекта:

$$\breve{R}_i = \sqrt{(x_i - x_\text{o})^2 + (y_i - y_\text{o})^2 + (z_i - z_\text{o})^2} + c\tau' = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}\| + D',$$

отсюда

$$\breve{\mathbf{R}} = \mathbf{f}(\chi) = \begin{Vmatrix} \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}\| \\ \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}\| \\ \vdots \\ \|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}\| \end{Vmatrix} + D' \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Vmatrix}$$

4 неизвестных => требуется как минимум 4 уравнения для 4-х измерений псевдодальностей

2. Применим МНК, который минимизирует квадратичную норму вектора невязок:

$$\left\| \breve{\mathbf{R}} - \mathbf{f}(\chi) \right\| \to \min$$

Вектор невязок

Решение навигационной задачи

3. Для применения МНК найдем производную функции **f(χ)**, связывающей вектор измерений с вектором состояния, по вектору состояния **χ**. Эта производная называется <u>градиентной матрицей</u>:

$$\frac{\partial \breve{R}_i}{\partial x_{\text{o}}} = \frac{-(x_i - x_{\text{o}})}{\sqrt{(x_i - x_{\text{o}})^2 + (y_i - y_{\text{o}})^2 + (z_i - z_{\text{o}})^2}} = \frac{-(x_i - x_{\text{o}})}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}\|}, \quad \frac{\partial \breve{R}_i}{\partial D'} = 1, \quad \text{отсюда}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\chi})}{\partial \boldsymbol{\chi}} = \mathbf{H}(\boldsymbol{\chi}) = \begin{vmatrix} \frac{-(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x})^{\text{T}}}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}\|} & 1 \\ \frac{-(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x})^{\text{T}}}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}\|} & 1 \\ \vdots & \\ \frac{-(\mathbf{x}_N - \mathbf{x})^{\text{T}}}{\|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}\|} & 1 \end{vmatrix} - \text{градиентная матрица размером } N \times 4$$

Отличие от дальномерного метода

4. Находим расширенный вектор состояния **χ**, пользуясь итеративным алгоритмом МНК (аналогично дальномерному методу).

Псевдорадиально-скоростной метод

ПОСТАНОВКА НАВИГАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Дано:

1. Вектор измерений псевдоскоростей (N измерений):

$$\breve{\tilde{\mathbf{V}}} = \left| \breve{\tilde{V}}_1 \quad \breve{\tilde{V}}_2 \quad \dots \quad \breve{\tilde{V}}_N \right|^{\mathrm{T}}, \quad \left(\,\breve{*}\text{- измерение}\right)$$

2. Координаты N опорных точек (радиомаяков, навигационных спутников), записанные в векторном виде:

$$\mathbf{x}_1 = \left| x_1 \; y_1 \; z_1 \right|^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{x}_2 = \left| x_2 \; y_2 \; z_2 \right|^{\mathrm{T}}, \quad \dots \quad \mathbf{x}_N = \left| x_N \; y_N \; z_N \right|^{\mathrm{T}}$$

3. Координаты объекта, вектор $\mathbf{x} = \left| x_{\text{о}} \; y_{\text{о}} \; z_{\text{о}} \right|^{\mathrm{T}}$

Найти: расширенный вектор состояния: $\mathbf{v} = \left| \mathbf{v}^{\mathrm{T}} \; V' \right|^{\mathrm{T}}$, где $\mathbf{v} = \left| v_x \; v_y \; v_z \right|^{\mathrm{T}}$

Псевдорадиально-скоростным методом находят не только вектор скорости объекта **v**, но и смещение частоты его ОГ благодаря включению в вектор состояния параметра $V' = c\delta_{\text{ОГ.ШВП}}$

Решение навигационной задачи

1. Запишем функциональную связь между вектором скорости объекта, смещением частоты его ОГ, и измеряемой псевдоскоростью:

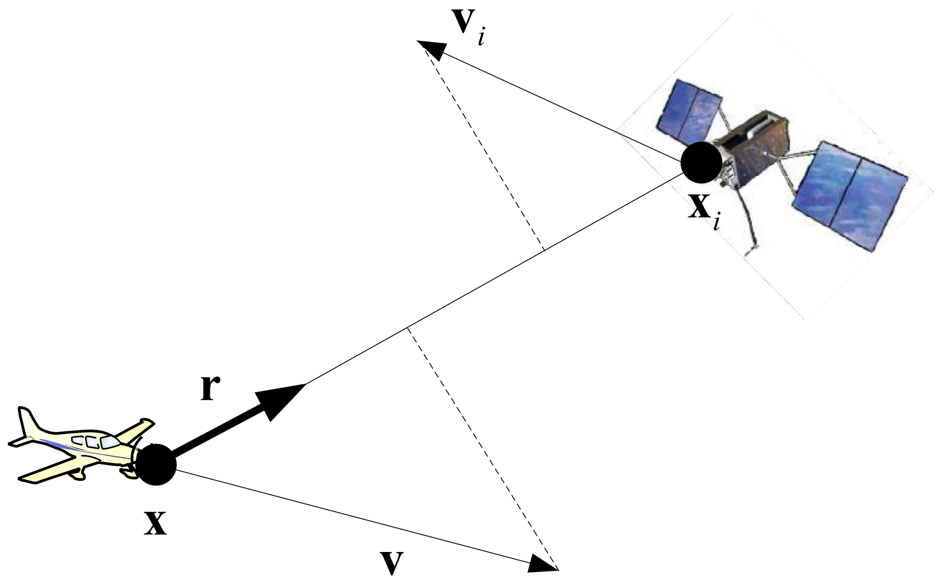
$$\breve{V}_i = V_i + V' = \mathbf{r}_i^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}\right) + V', \quad \text{где } \mathbf{r}_i = \frac{\left(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}\right)}{\left\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}\right\|}$$ - направляющий вектор, итого:

$$\breve{V}_i = \frac{\left(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}\right)^{\mathrm{T}}}{\left\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}\right\|}\left(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}\right) + V'$$ - в векторном виде,

4 неизвестных => 4 уравнения

$$\breve{V}_i = \frac{\left(x_i - x_{\text{o}}\right)\left(v_{x,i} - v_x\right) + \left(y_i - y_{\text{o}}\right)\left(v_{y,i} - v_y\right) + \left(z_i - z_{\text{o}}\right)\left(v_{z,i} - v_z\right)}{\sqrt{\left(x_i - x_{\text{o}}\right)^2 + \left(y_i - y_{\text{o}}\right)^2 + \left(z_i - z_{\text{o}}\right)^2}} + V'$$ - в скалярном виде.

$$\breve{\mathbf{V}} = \mathbf{f}\left(\mathbf{v}\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\left(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}\right)}{\left\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}\right\|} \\ \dfrac{\left(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}\right)}{\left\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}\right\|} \\ \vdots \\ \dfrac{\left(\mathbf{x}_N - \mathbf{x}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{v}_N - \mathbf{v}\right)}{\left\|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}\right\|} \end{vmatrix} + V' \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{vmatrix}$$



Решение навигационной задачи

2. Применим МНК, который минимизирует квадратичную норму вектора невязок:

$$\left\| \breve{\tilde{\mathbf{V}}} - \mathbf{f}(\mathbf{v}) \right\| \rightarrow \min$$

3. Для применения МНК найдем производную функции $\mathbf{f}(\mathbf{v})$, связывающей вектор измерений с вектором состояния, по вектору состояния $\mathbf{v}$. Эта производная называется <u>градиентной матрицей</u>:

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{H}(\mathbf{v})$$ - матрица *N*x4

Частные производные псевдоскорости по элементам вектора скорости и по *v’*:

$$\frac{\partial \breve{V}_i}{\partial v_x} = \frac{-(x_i - x_{\text{o}})}{\sqrt{(x_i - x_{\text{o}})^2 + (y_i - y_{\text{o}})^2 + (z_i - z_{\text{o}})^2}} = \frac{-(x_i - x_{\text{o}})}{\left\| \mathbf{x}_i - \mathbf{x} \right\|}, \qquad \frac{\partial \breve{V}_i}{\partial V'} = 1$$

Решение навигационной задачи

Градиентная матрица для решения МНК в псевдорадиально-скоростной задаче

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{H}(\mathbf{v}) = \begin{vmatrix} \frac{-(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x})^{\mathrm{T}}}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}\|} & 1 \\ \frac{-(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x})^{\mathrm{T}}}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}\|} & 1 \\ \vdots & \\ \frac{-(\mathbf{x}_N - \mathbf{x})^{\mathrm{T}}}{\|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}\|} & 1 \end{vmatrix} -$$

градиентная матрица размером $N \times 4$ не отличается от градиентной матрицы в псевдодальномерной задаче $\mathbf{H}(\mathbf{x})$

4. Находим расширенный вектор состояния $\mathbf{v}$, пользуясь итеративным алгоритмом МНК (аналогично дальномерному методу).

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_{k-1} + \left(\left(\mathbf{H}(\mathbf{v}_{k-1}) \right)^{\mathrm{T}} \mathbf{H}(\mathbf{v}_{k-1}) \right)^{-1} \left(\mathbf{H}(\mathbf{v}_{k-1}) \right)^{\mathrm{T}} \left(\breve{\tilde{\mathbf{V}}} - \mathbf{f}(\mathbf{v}_{k-1}) \right)$$

Пространственно-временной геометрический фактор

GDOP – “Geometry Dilution of Precision” – пространственно-временной геометрический фактор

PDOP – “Positioning DOP” – пространственный геометрический фактор

TDOP – “Time DOP” – временной геометрический фактор

$$\sigma_{\chi} = GDOP \cdot \sigma_{\breve{R}}, \quad \sigma_{\nu} = GDOP \cdot \sigma_{\breve{V}}$$

$$\sigma_{X} = PDOP \cdot \sigma_{\breve{R}}, \quad \sigma_{v} = PDOP \cdot \sigma_{\breve{V}}$$

$$\sigma_{D'} = TDOP \cdot \sigma_{\breve{R}}, \quad \sigma_{V'} = TDOP \cdot \sigma_{\breve{V}}$$

$$\mathrm{diag}\left[\left(\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\right)^{-1}\right] = \left| dx^2 \; dy^2 \; dz^2 \; dt^2 \right|$$

$$GDOP = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2},$$

$$PDOP = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

$$TDOP = dt$$

Алгоритм работы навигационной аппаратуры